Álgebra Lineal I
Proyecto
Caminata por el jardín y sistemas lineales en el cubo

1. Motivación

El álgebra lineal tiene bastantes aplicaciones en problemas de investigación en matemáticas puras. A continuación mostramos un ejemplo en el que podemos usar argumentos de álgebra lineal para probar un teorema de geometría discreta.

Un guardia de una prisión, aficionado a las matemáticas y al álgebra lineal, obliga a un prisionero a caminar bajo las siguientes instrucciones. El prisionero recibe un conjunto finito M de vectores en el plano, cada uno de longitud a lo más $10m$. Él comienza una caminata en el centro de un jardín circular de radio de $20m$. Toma un vector v_1 en M y lo usa para caminar del centro al extremo del vector. Después toma otro vector v_2 en M y de donde ahora está camina usando ese vector v_2. Luego elige un vector v_3 en M y sigue así sucesivamente, usando cada vector en M exactamente una vez.

Los vectores en M suman 0, de manera que el prisionero terminará nuevamente en el centro del jardín cuando acabe de usar todos los vectores. Sin embargo, el prisionero no debe cruzar la frontera del jardín en ningún momento (si lo hace, el guardia lo sancionará). ¿Será posible que el prisionero siempre pueda elegir el orden de los vectores usados para nunca salirse del jardín?

El teorema que demostraremos en este proyecto prueba que sí, que siempre existe una caminata sin problemas para cada conjunto finito de vectores M. De hecho, el teorema es más general y muestra que también funciona para jardines que son bolas d-dimensionales.

Teorema. *Sea M un conjunto arbitrario de n vectores en $\mathbb{R}^d$ tal que $\|v\| \leq 1$ para cada $v \in M$, donde $\|v\|$ es la norma usual euclidiana, y tal que la suma de todos los vectores en M es igual a 0. Entonces, es posible acomodar los vectores de M en una sucesión $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de tal manera que $\|v_1 + v_2 + \cdots + v_k\| \leq d$ para cada $k = 1, \ldots, n$.*

2. Definiciones

Definición. Un conjunto $K = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ de $k \geq d$ vectores en $\mathbb{R}^d$, cada uno de longitud a los más 1, es llamado *bueno* si existen coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ que satisfacen:

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

$$\begin{aligned} \alpha_i \in [0,1] &\text{ para } i = 1,2,\dots,k \\ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_k w_k &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k &= k-d \end{aligned}$$

3. Exploración de las definiciones

1. Se tienen los 18 números $4,4,4,5,5,5,6,6,6,-3,-3,-3,-3,-5,-7,-7,-7,-7$. Nota que tienen suma 0. Encuentra una forma de acomodarlos en una lista de izquierda a derecha de modo que la suma de los primeros k nunca exceda 14 para ningún valor $k = 1,\dots,18$.
2. Supongamos que A es una matriz en $M_{2,3}(\mathbb{R})$ y b es un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene una solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ con $0 \leq x_i \leq 1$ para cada $i = 1,2,3$. Muestra que $Ax = b$ tiene una solución en donde alguna de sus entradas es igual a 0 ó 1.
3. Demuestra que un conjunto M de vectores como en la hipótesis del teorema es bueno de acuerdo a la definición dada.

4. Demostración del teorema paso a paso

El primer paso para demostrar el teorema es demostrar el siguiente lema:

Lema. *Sea $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones lineales en $n \geq m$ variables, y supongamos que tiene una solución $x_0 \in [0,1]^n$, es decir, con todas sus entradas números reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno. Entonces existe una solución $x \in [0,1]^n$ para la cual al menos $n-m$ entradas son iguales a 0 ó 1.*

1. Demuestra el lema por inducción sobre $n - m$.

La idea fuerte para probar el teorema es la siguiente: El conjunto M es "muy bueno" porque sus vectores suman 0, y por lo tanto la suma tiene norma 0.

En la parte de definiciones introdujimos una noción más débil de un conjunto "bueno" de vectores. La definición es tal que si K es un conjunto bueno, entonces la suma de todos sus vectores tiene norma a lo más d. Probaremos que todo conjunto bueno K de $k > d$ vectores tiene un subconjunto bueno de $k-1$ vectores. Esto nos permitirá encontrar el orden deseado de los vectores de M, por inducción.

2. Prueba que si $K = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es bueno, entonces $\|w_1 + w_2 + \cdots + w_k\| \leq d$.

Afirmación. *Si $K = \{w_1, w_2, \dots w_k\}$ es un conjunto bueno de $k > d$ vectores, entonces existe alguna i para la cual $K \setminus \{w_i\}$ es un conjunto bueno de $k-1$ vectores.*

Los siguientes problemas están enfocados a probar esta afirmación:

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

3. Toma $K = \{w_1, w_2, \dots w_k\}$ un conjunto bueno. Considera el siguiente sistema de ecuaciones para las variables $x_1, \dots, x_k$:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_k w_k = 0 \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k - d - 1. \tag{2}$$

   Encuentra una solución en $[0,1]^k$.

4. Aplica el lema para mostrar que hay una solución $x \in [0,1]^k$ con al menos $k-d-1$ entradas iguales a 0 ó 1, y prueba que al menos una de las entradas de x es 0.

5. Prueba que para cualquier índice i con $x_i = 0$, el conjunto $K \backslash \{w_i\}$ es bueno.

Esto concluye la prueba de la afirmación. Los siguientes problemas se enfocan en demostrar el teorema con lo que ya demostramos. Toma M como en las hipótesis del teorema.

6. Empieza con el conjunto $M_n := M$, que es bueno. Usa la afirmación para encontrar un vector en M_n tal que al quitarlo se obtenga un conjunto M_{n-1} que siga siendo bueno.

7. Nota que este procedimiento se puede seguir haciendo hasta llegar a M_d, ¿cómo ordenarías los vectores de M_d para que cumplan el teorema?

8. Usa el orden inverso al que fuiste quitando los vectores y el orden de los vectores en M_d para construir el orden deseado para la demostración del teorema.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721