Variable Compleja I
Unidad 1: Tarea en equipo

Estos son los enunciados de la tarea en equipos. Deberán entregarla de acuerdo a todas las instrucciones indicadas en Moodle.

1. Demuestre las siguientes desigualdades.

   a) Para $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

   b) Utilizando argumentos geométricos, para todo $z \in \mathbb{C}$,

   $$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z||\arg(z)|,$$

   c) Para $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a|, |b| < 1$,

   $$\left| \frac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right| < 1.$$

2. Utilizando la identidad

   $$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

   demuestre la identidad trigonométrica de Lagrange:

   $$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3. Demuestre que tres números complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen que

   $$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

4. Demuestre que dos números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ tienen imágenes diametralmente opuestas en la esfera de Riemann bajo la proyección estereográfica si y sólo si $z\overline{w} = -1$.

5. Sea $\{C_1, ..., C_n\} \subseteq \mathbb{C}$ una familia de subconjuntos arco-conexos. Suponiendo que éstos cumplen

   $$C_1 \cap C_2 \neq \varnothing, \quad C_2 \cap C_3 \neq \varnothing, \quad \cdots, C_{n-1} \cap C_n \neq \varnothing$$

   Demuestra que $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ es arco-conexo.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323