Variable Compleja I
Unidad 1: Tarea examen

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ distintos de cero. Demuestra que

$$|z| = |w| \iff \frac{z}{w} + \frac{w}{z} \in [-2, 2], \quad \text{en cuyo caso} \quad \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 2\cos\theta$$

   donde θ es el ángulo entre z y w.

2. (2.5 pts) *(Las cuentas que hay que hacer al menos una vez una vida...)* Deriva expresiones en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ para:

   a) $\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta$,
   b) $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$.

3. (2.5 pts) Prueba que si la sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ de números complejos converge a $z \in \mathbb{C}$, entonces la sucesión $\{|z_n|\}_{n\geq 1}$ converge a $|z|$. ¿Es cierto lo recíproco?

4. (2.5 pts) Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $\operatorname{Re}(z^n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces z es un real no negativo.

5. (+2 pts extra) Sean $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polinomio de grado n y $\epsilon \in (0, 1)$. Considera

$$\rho_\epsilon = \text{máx}\left\{1, \frac{1}{\epsilon|a_n|}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)\right\}$$

   prueba que para todo $z \in \mathbb{C}\backslash D_{\rho_\epsilon}(0)$ se cumple

$$(1-\epsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n||z|^n$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323