Variable Compleja I
Unidad 1: Tarea examen con soluciones

Problemas

1. (2.5 pts) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ distintos de cero. Demuestra que

$$|z| = |w| \iff \frac{z}{w} + \frac{w}{z} \in [-2, 2], \quad \text{en cuyo caso} \quad \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 2\cos\theta$$

   donde θ es el ángulo entre z y w.

2. (2.5 pts) *(Las cuentas que hay que hacer al menos una vez una vida...)* Deriva expresiones en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ para:

   a) $\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta$,

   b) $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$.

3. (2.5 pts) Prueba que si la sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ de números complejos converge a $z \in \mathbb{C}$, entonces la sucesión $\{|z_n|\}_{n\geq 1}$ converge a $|z|$. ¿Es cierto lo recíproco?

4. (2.5 pts) Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $\operatorname{Re}(z^n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces z es un real no negativo.

5. (+2 pts extra) Sean $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polinomio de grado n y $\epsilon \in (0, 1)$. Considera

$$\rho_\epsilon = \text{máx}\left\{1, \frac{1}{\epsilon|a_n|}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)\right\}$$

   prueba que para todo $z \in \mathbb{C}\backslash D_{\rho_\epsilon}(0)$ se cumple

$$(1-\epsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n||z|^n$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, expresados en forma polar como $z = r_1\text{cis}\alpha$ y $w = r_2\text{cis}\beta$. $\Longrightarrow]$ Consideremos que $|z| = |w|$, esto es, que $r_1 = r_2$. Tomando la suma de cocientes, por el álgebra de argumentos desarrollada para la forma polar:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = \frac{r_1\text{cis}\alpha}{r_2\text{cis}\beta} + \frac{r_2\text{cis}\beta}{r_1\text{cis}\alpha} = \frac{\text{cis}\alpha}{\text{cis}\beta} + \frac{\text{cis}\beta}{\text{cis}\alpha} = \text{cis}(\alpha-\beta) + \text{cis}(\beta-\alpha) \\ = \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\alpha) + i\,\text{sen}(\beta-\alpha) \\ = \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta) + \cos(-(\alpha-\beta)) + i\,\text{sen}(-(\alpha-\beta)) \\ = 2\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\theta \in [-2,2], \qquad \theta = \alpha-\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Donde para llegar a la última expresión se consideró la paridad de las funciones cos y sen.
$\Longleftarrow]$ Considerando ahora que $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \in [-2,2]$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\alpha \geq \beta$ y definiendo $t = \frac{r_1}{r_2}$ y $\theta = \alpha - \beta$.
Dadas las hipótesis, la suma anterior se traduce en

$$\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = t\text{cis}\theta + \frac{1}{t}\text{cis}(-\theta) = \left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\theta + i\left(t - \frac{1}{t}\right)\text{sen}\,\theta \in [-2,2]$$

Es importante notar que por hipótesis, la suma es *un número real*, por lo que la parte imaginaria debe ser 0, así:

$$\left(t - \frac{1}{t}\right)\text{sen}\,\theta = 0 \iff t - \frac{1}{t} = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta = 0 \tag{2}$$

En el primer caso se tiene que, recordando que al ser t un cociente de módulos, en particular $t > 0$:

$$t - \frac{1}{t} = 0 \overset{t>0}{\iff} t = 1 \iff r_1 = r_2 \iff |z| = |w| \tag{3}$$

Mientras que en el segundo caso, restringiéndose a $\theta \in [0, 2\pi)$ se tiene que $\text{sen}\,\theta = 0 \iff \theta = 0, \pi$, dando como casos:

$$\theta = 0 \implies \alpha = \beta \implies \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = t + \frac{1}{t} \in [-2,2] \tag{4}$$

$$\theta = \pi \implies \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) \in [-2,2] \tag{5}$$

$$\left[\begin{array}{c} t > 0,\ \frac{1}{t} > 0, \\ t + \frac{1}{t} \in [-2,2] \cap (0,\infty) \end{array}\right] \implies t + \frac{1}{t} \in (0,2] \tag{6}$$

Examinando la función equivalente a la última expresión $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \frac{1}{x}$, un cálculo simple de derivadas lleva a que ésta alcanza su mínimo en $x = 1$, y este mínimo es $f(1) = 2$, por lo tanto:

$$t + \frac{1}{t} \in (0,2] \iff t + \frac{1}{t} = 2 \iff t = 1 \iff r_1 = r_2 \iff |z| = |w| \tag{7}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para resolver esto, basta recordar la fórmula de De Moivre para potencias de un número en forma polar:

$$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta] \tag{8}$$

a) Tomando $z \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = 1$ y $n = 2$, de la expresión (9), desarrollando el binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + (i)^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta + i2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{9}$$

Pero por hipótesis se sabe que (10) es igual a $\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta$, entonces por la igualdad de números complejos:

$$\begin{cases}\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta \\ \mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\end{cases} \tag{10}$$

b) Tomando $z \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = 1$ y $n = 3$, de la expresión (9), desarrollando el binomio al cubo:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 3(i)^2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta + (i)^3\,\mathrm{sen}^3\,\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta + i(3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta)\end{aligned} \tag{11}$$

De manera completamente análoga al inciso a), la expresión (12) es igual a $\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$, entonces por la igualdad de números complejos:

$$\begin{cases}\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ \mathrm{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta\end{cases} \tag{12}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Sea $\epsilon > 0$. Para esto primero es necesario recordar que como $z_n \to z$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - z| < \epsilon, \qquad n \geq N \tag{13}$$

Entonces basta exhibir un $N^* \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N^*$, $||z_n| - |z|| < \epsilon$.
Recordando la desigualdad consecuencia de la desigualdad del triángulo

$$\text{Para } z, w \in \mathbb{C}, \text{ se cumple que } ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Se tiene que para $N^* = N \in \mathbb{N}$ se cumple por (14) que:

$$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \epsilon \implies ||z_n| - |z|| < \epsilon \tag{14}$$

Así se concluye que $|z_n| \to |z|$. Es importante notar que la convergencia que se tiene por hipótesis es una convergencia de números complejos mientras que la demostrada es una convergencia de números reales.
Lo converso **no es cierto**, basta considerar la sucesión de complejos $\{i^n\}_{n\geq 1}$, por un lado se tiene que la sucesión oscila entre los valores $i,\ -1,\ -i$ y 1, mientras que $\{|i^n|\}_{n\geq 1}$ es la sucesión constante 1 ya que $|i^n| = |i|^n = 1^n = 1$, es decir, $|i^n| \to 1$ pero i^n no converge.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ con $r \geq 0$, por la *fórmula de De Moivre* se sabe que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{15}$$

Tomando la parte real de (16)

$$\operatorname{Re}(z^n) = \operatorname{Re}(r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)) = r^n \cos n\theta \tag{16}$$

Si $r^n = 0$ se tiene inmediatamente el resultado ya que $r^n = 0 \implies z = 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Considerando que $r > 0$:

$$\begin{aligned}
&r^n \cos n\theta \geq 0 \implies \cos n\theta \geq 0\\
&\implies n\theta \in \left[-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
&\implies \theta \in \left[-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
&\implies \theta \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}\\
&\implies \theta = 0 \implies \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 0 = 0\\
&\implies \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(r^n \cos\theta + i r^n \operatorname{sen}\theta) = r^n \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (17)
\end{aligned}$$

Así, como $\operatorname{Im}(z) = 0$, se puede concluir que $z \in \mathbb{R}$, entonces como $z \in \mathbb{R}$ y $z^n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en particular tomando $n = 1$ se concluye que $z \geq 0$. Así $z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Tomando $|z| \geq 1$, partiendo de la *desigualdad del triángulo*, se tiene primeramente que:

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k \leq \left[\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right] |z|^n \tag{18}$$

donde en la última igualdad se utilizó que para los z de interés, $k \leq n \implies |z|^k \leq |z|^n$. Definiendo a $\tilde{P}(z)$ de modo que $P(z) = \tilde{P}(z) + a_n z^n$ (es decir, como la suma parcial hasta el $(n-1)$-ésimo término) se tiene de manera análoga que para $|z| \geq 1$:

$$|\tilde{P}(z)| \leq \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right] |z|^{n-1} = \frac{1}{|z|} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right] |z|^n \tag{19}$$

Si se toma ahora $|z| \geq \frac{1}{\epsilon |a_n|} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right]$ para $\epsilon \in (0,1)$, así:

$$\frac{1}{|z|} \leq \frac{\epsilon |a_n|}{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|} \implies \frac{1}{|z|} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right] |z|^n \leq \epsilon |a_n||z|^n \tag{20}$$

Inspirándose en la última desigualdad, se define

$$\rho_\epsilon = \text{máx} \left\{ 1, \frac{1}{\epsilon |a_n|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) \right\} \tag{21}$$

Así, para $|z| \geq \rho_\epsilon$ se satisfacen las condiciones previas simultáneamente, de modo que

$$\begin{aligned}
|\tilde{P}(z)| \leq \epsilon |a_n||z|^n &\iff -\epsilon |a_n||z|^n \leq |\tilde{P}(z)| \\
|P(z)| \leq |a_n||z|^n + |\tilde{P}(z)| &\leq |a_n||z|^n + \epsilon |a_n||z|^n = (1+\epsilon)|a_n||z|^n \\
|P(z)| = |a_n z^n - (-\tilde{P}(z))| &\geq |a_n||z|^n - |\tilde{P}(z)| \geq |a_n||z|^n - \epsilon |a_n||z|^n = (1-\epsilon)|a_n||z|^n \\
(1-\epsilon)|a_n||z|^n &\leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n||z|^n \qquad (22)
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye la demostración.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323