# Variable Compleja I
# Unidad 3: Tarea examen

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Utilizando lo conocido sobre la serie geométrica
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$
da formas cerradas para:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ para $|z| < 1$ y,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ para $|z| < 1$.

2. (2.5 pts) Determina el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:
$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}.$$

3. (2.5 pts) Utilizando la expresión de la exponencial como serie, calcula una expresión en serie de la forma
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$
para la función $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$ en el anillo $0 \le |z+1| < \infty$.

4. (2.5 pts) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias que converge para $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \neq 0$. Demuestra que:
   a) La serie converge absolutamente para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |z_0|$, y que,
   b) La serie converge uniformemente para $|z| \le |z_1|$, donde $z_1 \in \mathbb{C}$ satisface que $|z_1| < |z_0|$.

5. (+2 pts extra) Sea $R > 0$. Demuestra que si $z \in \mathbb{D}_R(0)$, entonces:
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = \frac{R^2}{R^2 - z^2}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323