Álgebra Lineal I
Unidad 3: Tarea en equipo

1. Aplica el proceso de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^4$ que consiste de los vectores $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$ y $(1,1,1,1)$. Expresa a $(1,2,3,4)$ como combinación lineal de la base ortonormal que obtengas.

2. Sean $r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ números reales. Para cada i, considera la forma lineal $\mathrm{ev}_{r_i} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ que a cada polinomio $p(x)$ lo manda a su evaluación en r_i, es decir,

$$\mathrm{ev}_{r_i}(p(x)) = p(r_i).$$

Muestra que $\mathrm{ev}_{r_0}, \mathrm{ev}_{r_1}, \ldots, \mathrm{ev}_{r_n}$ forman una base del espacio dual $(\mathbb{R}_n[x])^*$.

3. Demuestra que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son reales y l_1, l_2, l_3 son formas lineales en $\mathbb{R}^3$, entonces la función

$$q(x) = \alpha_1 l_1(x) l_2(x) + \alpha_2 l_2(x) l_3(x) + \alpha_3 l_3(x) l_1(x)$$

es una forma cuadrática. Encuentra su forma polar.

4. Considera $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado a lo más 3. Definimos

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=1}^{5} p(j)q(j).$$

   a) Muestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ así definido es un producto interior.
   b) Encuentra el ángulo entre los polinomios $1 + x^3$ y $3x - 2x^2$.
   c) Para cada entero positivo n, determina la norma del polinomio $1 + nx^3$.
   d) Determina la distancia entre los polinomios 1 y $1 + x + x^2 + x^3$.

5. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua que no toma valores negativos y sea

$$x_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt.$$

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

Demuestra que para cualesquiera $n, p \geq 0$ se tiene que

$$x_{n+p} \leq \sqrt{x_{2n}} \cdot \sqrt{x_{2p}}.$$

Sugerencia: Define un producto interior sobre el cual puedas usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721