Álgebra Lineal I
Unidad 2: Tarea examen

1. (2 pts) Sea $V = M_{6,3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de 6×3 con entradas reales.
   - Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales existe una transformación lineal inyectiva de V a $M_n(\mathbb{R})$.
   - Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales existe una transformación lineal suprayectiva de V a $M_n(\mathbb{R})$.
2. (2 pts) Considera la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y^5, x^5)$ y la transformación $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $R(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.
   - Demuestra que T no es una transformación lineal.
   - Muestra que R es una transformación lineal. Determina su kernel, su imagen y su rango.
3. (3 pts) Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales con grado a lo más 3. Sea $T : V \to V$ la transformación dada por $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$. Recuerda que $p'(x)$ es la derivada del polinomio.

   Prueba que T es lineal y encuentra la matriz asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\right\}$ de V.
4. (3 pts) Considera la siguiente matriz:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La suma de las entradas en cada fila es cero, pues

   $$1 + 0 - 1 = 2 - 2 + 0 = -3 + 2 + 1 = 0.$$

   También la suma de las entradas en cada columna es cero.

   Una matriz en $M_3(\mathbb{R})$ es *mágica* si la suma de las entradas en cada fila y en cada columna es igual a cero. Demuestra que el conjunto de matrices mágicas es un subespacio de $M_3(\mathbb{R})$. Encuentra una base para este subespacio y determina su dimensión.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

5. (+2 pts extra) Sea X cualquier conjunto finito con n elementos y $P(X)$ la familia de subconjuntos de X. Sea $\mathbb{F}_2$ el campo de dos elementos. Definimos las siguientes operaciones binarias:

$$+ : P(X) \times P(X) \to P(X)$$
$$\cdot : \mathbb{F}_2 \times P(X) \to P(X).$$

dadas por:

- Para cualesquiera dos subconjuntos A y B de X, se tiene que $A+B$ es la diferencia simétrica de A y B, es decir, el conjunto $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ que tiene a los elementos de A o de B, pero que no están en $A \cap B$.
- Para cualquier subconjunto A de X, se tiene $1 \cdot A = A$ y $0 \cdot A = \emptyset$.

Resuelve los siguientes incisos.

a) Demuestra que $P(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_2$ con estas operaciones. Muestra que la familia $\mathcal{B}$ de conjuntos unitarios de X es una base para $P(X)$. ¿Cuál es entonces la dimensión de $P(X)$?

b) Demuestra que la familia W de subconjuntos de X con cardinalidad par es un subespacio de $P(X)$. Encuentra una base para W y su dimensión.

c) Completa la base de W a una base $\mathcal{B}'$ de $P(X)$. Da un subespacio W' tal que $P(X) = W \oplus W'$.

d) Encuentra la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y su inversa.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721