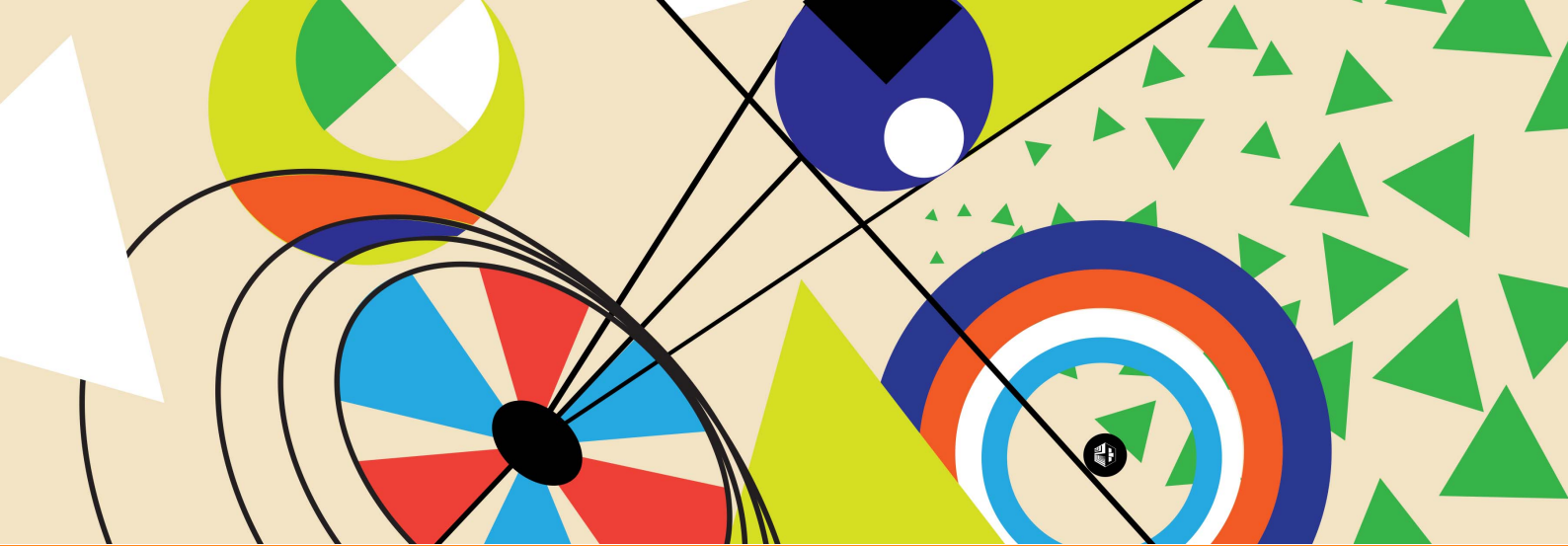




Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021



Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U3. Introducción a la geometría moderna

Puntos armónicos

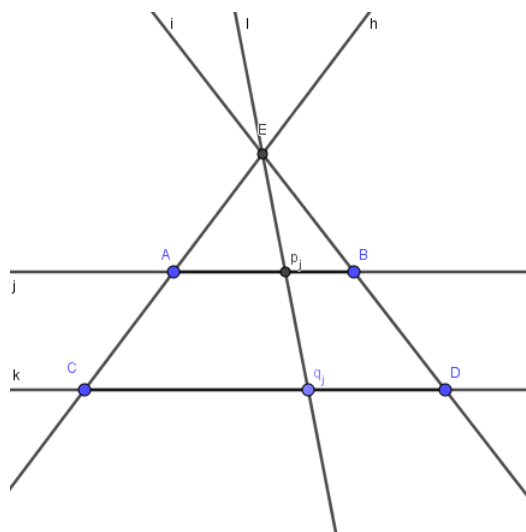
Problema: Demuestre que los puntos en un segmento de recta pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de otro segmento de recta de doble longitud.

Demostración

Sea AB un segmento de recta cualquiera en el plano y sea CD un segmento tal que $CD = 2AB$. Colocamos el segmento CD paralelo al segmento AB .

Trazamos las rectas que pasen por los puntos extremos de cada recta; una recta h que pase por A y C y otra recta i que pasa por B y D .

Sea E el punto de intersección de las rectas h e i . Por el teorema 0.1 de las notas 4, sabemos que si tenemos una recta m y un punto P fuera de la recta, existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por P , excepto la paralela a m y los puntos de la recta m .



Así, podemos considerar al punto E como un punto fuera de los segmentos de recta AB y CD , entonces aplicando el teorema 0.1 podemos dar una correspondencia biunívoca con el haz de rectas por E y los puntos de las rectas AB y CD respectivamente.

Ahora para dar la correspondencia biunívoca entre los puntos de los segmentos de rectas, consideramos una recta cualquiera del haz por E excepto la paralela y las rectas que salgan de las rectas h y la recta i , es decir aquellas rectas que al trazarlas no corten puntos dentro de los segmentos AB y CD . Dicha recta corta a los dos segmentos de recta en dos puntos que llamaremos p_i, q_j donde $p_i \in AB$ y $q_j \in CD$ de manera que estos dos puntos son colineales junto con E .

De esta forma podemos dar una correspondencia $p_i \rightarrow q_j$ siempre y cuando cumplan las condiciones anteriores, que p_i, q_j y E sean colineales; de esta forma a cada p_i le corresponde un q_j .

Ahora para dar la otra correspondencia tomamos un punto cualquiera q_j en el segmento CD y por cada q_j que tomemos de este segmento se puede trazar que pase por q_j y por E . Así obtenemos puntos p_i en el segmento AB que serán los puntos de intersección obtenidos de la rectas que se trazan por q_j y el punto E . Por tanto existe $q_j \rightarrow p_i$, de tal manera que a cada q_j de CD le corresponde uno y solo un punto de AB . **Q.E.D.**

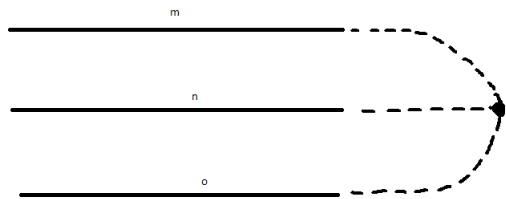
Problema: Determine que tres rectas en el plano ampliado determinan un triángulo o son concurrentes.

Solución

Supongamos que tenemos tres rectas m , n y o en el plano ampliado euclidiano.

Caso 1. Supongamos que las tres rectas son paralelas en el sentido euclidiano.

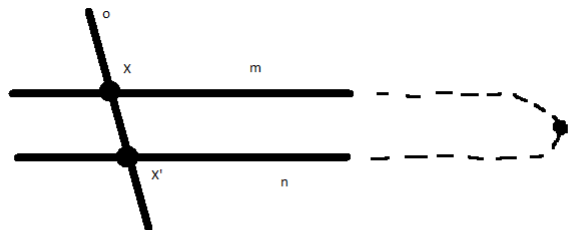
Si las rectas m , n y o son paralelas en el sentido euclidiano, las tres rectas se intersectan en el punto al infinito. Por lo tanto m , n y o son concurrentes.



Caso 2. Dos rectas son paralelas en el sentido euclidiano y una recta no lo es.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que m y n son paralelas en el sentido euclidiano y o es una recta ordinaria, por lo que o sería transversal a m y n .

Como o es transversal a m y n , o interseca a m y n en los puntos X y X' respectivamente.

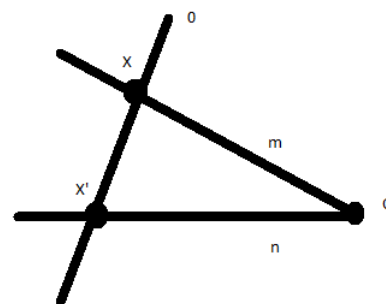


Por otro lado, como m y n son paralelas en el sentido euclidiano, m y n se intersectan en el punto al infinito que llamaremos P .

De este modo podemos construir un triángulo que contenga como vértices a los puntos X , X' y P .

Caso 3. Las tres rectas son ordinarias.

Sean m , n y o tres rectas ordinarias, por el teorema 0.4 de las notas 3, para las rectas m y n ordinarias se intersectan en un punto ordinario al que llamaremos Q . Así la recta o puede ser una recta transversal que corta a m y n en los puntos X y X' respectivamente. Por lo tanto podemos construir un triángulo cuyos vértices son X , X' y Q .



Caso 4. Una de las rectas es recta al infinito.

Sin pérdida de generalidad supongamos que la recta o es la recta al infinito y que las rectas m y n son ordinarias.

Como m y n son ordinarias, por m podemos trazar todas las paralelas que se intersecan en el punto al infinito que llamaremos P . De manera similar trazaremos todas las paralelas a n que se intersecan en el punto al infinito que llamaremos P' .

Llamamos o a la recta al infinito que pasa por los puntos al infinito P y P' .

Por otro lado m y n no son paralelas en el sentido euclidiano, por lo que estas se intersecan en un punto ordinario que llamaremos Q . Por lo tanto se puede formar un triángulo cuyos vértices son P , P' y Q .

