Suprayectividad

Inyectividad

Biyectividad

de funciones

Arilin's Math World

Inyectividad

Definición: Sea $f: A \to B$ una función.
Diremos que f es inyectiva, si y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se tiene que $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Elementos diferentes tienen imágenes diferentes.

¿Cómo demostrar que una función es inyectiva?

- $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ (usando contrapositiva)
- $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ (Demostración directa)

Ejemplo.

Demostrar que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = 5x - 8$ es inyectiva.

Dem.

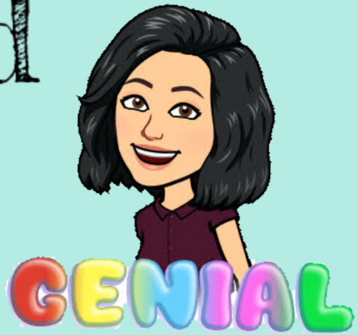
Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces

$5x_1 - \underline{8} = 5x_2 - \underline{8}$

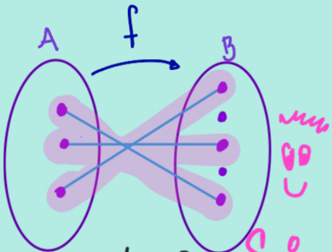
$5x_1 = 5x_2$

$x_1 = x_2$

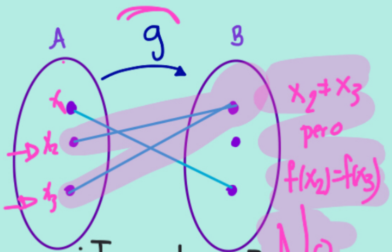
Inyectividad



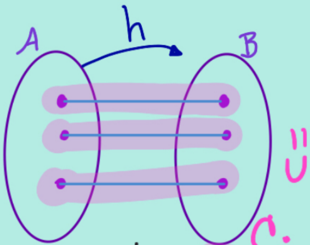
Definición: Sea $f: A \to B$ una función.
Diremos que f es inyectiva, si y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se tiene que $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.



¿Inyectiva? Sí



¿Inyectiva? No



Inyectiva? Sí

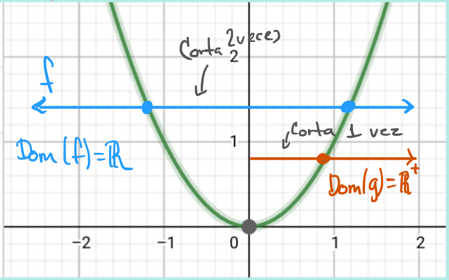
Inyectividad

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x^2$

¿Inyectiva?

+ Ejemplos

No, pues para $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x\neq -x$ pero $f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$



Definición: Sea $f:A\to B$ una función. Diremos que f es inyectiva, si y sólo si, para cualesquiera $x_1,x_2\in A$ se tiene que $x_1\neq x_2$ implica $f(x_1)\neq f(x_2)$.

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x^2$

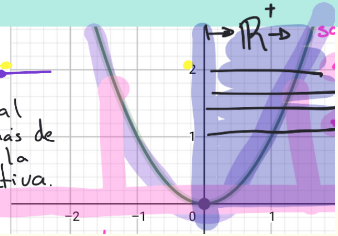
¿Inyectiva? Demostración.

Sí. Notamos que si $x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$ son diferentes entonces $x_1<x_2$ ó $x_2<x_1$

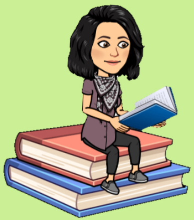
- Si $x_1<x_2 \to x_1^2<x_2^2 \to f(x_1)<f(x_2)$
- Si $x_2<x_1 \to x_2^2<x_1^2 \to f(x_2)<f(x_1)$

$f(x_1)\neq f(x_2)$

- Si la recta horizontal corta la gráfica más de 1 vez entonces la función No es inyectiva.



Suprayectividad

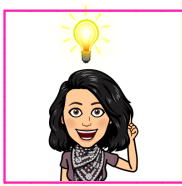


<u>Definición:</u> Sea $f: A \to B$ una función. Decimos que f es suprayectiva, o sobre, si y sólo si,

$$Im(f) = B$$

Sabemos que $Im(f) \subseteq B$ siempre que f sea función. Por lo tanto para demostrar la suprayectividad sólo hace falta ver que $B \subseteq Im(f)$.

Una función es suprayectiva si todo elemento del condominio pertenece a la imagen de la función.



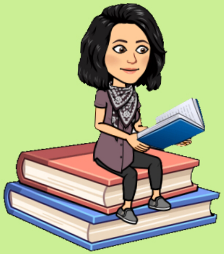
Para demostrar esto considero un elemento, b, en el condominio y busco un elemento, a, en el dominio tal que b=f(a).

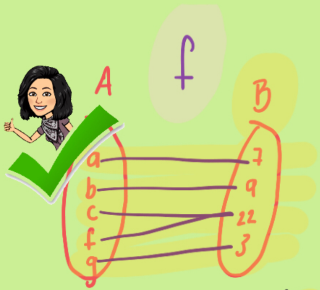
Suprayectividad

<u>Definición:</u> Sea $f: A \to B$ una función. Definimos la imagen de f como el conjunto

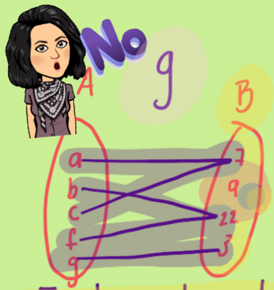
$$\operatorname{Im}(f) = \{ b \in B \mid f(a) = b \text{ para algún } a \in A \}$$

<u>Definición:</u> Sea $f: A \to B$ una función. Decimos que f es suprayectiva, o sobre, si y sólo si, $\operatorname{Im}(f) = B$



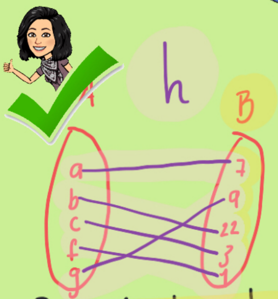


Para cada elemento $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$



Existe un elemento en B que No está en la imagen de g.

$\operatorname{Im}(g) \neq B$



Para cada elemento $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$

Suprayectividad

$A \quad B$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2+1$

$f(x) = x^2+1$

$f(x) = x^2 + 1$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$

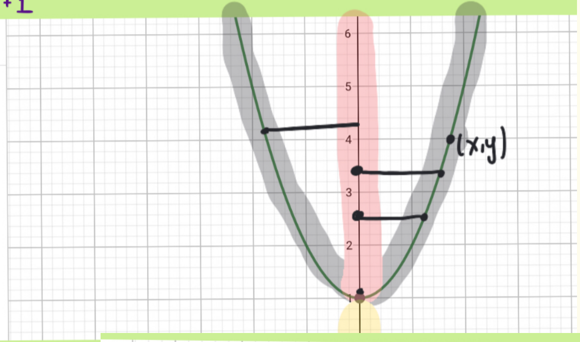
¿Es suprayectiva?

No.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$, por lo tanto $x^2+1 \geq 1$.

Las $y \in \mathbb{R}$ tales que $y < 1$ pertenecen al codominio pero no a la imagen

$Im(f) \neq B$



$f: \mathbb{R} \to [1, \infty)$

$f(x) = x^2 + 1$

¿Es suprayectiva?

Si.

Demostración

$Im(f) = [1, \infty)$

$Im(f) \subseteq B$

$B \subseteq Im(f)$

Sea $y \in B \Rightarrow 1 \leq y < \infty$. Entonces

$y - 1 \geq 0$, por lo tanto

$\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$, consideremos $x = \sqrt{y-1}$

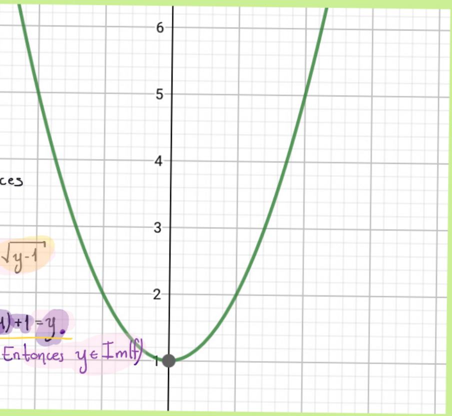
entonces

$f(x) = f(\sqrt{y-1}) = (\sqrt{y-1})^2 + 1 = (y-1)+1 = y$.

Entonces $y \in Im(f)$

Por lo tanto $B = [1, \infty) \subseteq Im(f)$

$B = Im(f)$



Funciones Biyectivas

Definición: Diremos que una función $f: A \to B$ es biyectiva si y sólo si f es ambas, inyectiva y suprayectiva.

Para demostrar que una función
es biyectiva es necesario verificar
que sea inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo.

Sean $A = \{$Personas dentro de un salón$\}$ y $B = \{$Sillas dentro del salón$\}$. Pensemos $f: A \to B$ como la relación que a cada persona le asigna donde sentarse

1) ¿Qué significa que f sea función?
   - Que cada persona tenga una silla para sentarse
   - Que cada persona se siente en una única silla.

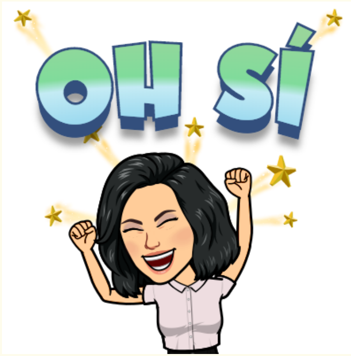
2) ¿Qué significa que f sea inyectiva?
   - Que personas diferentes se sienten en sillas diferentes

3) ¿Qué significa que f sea suprayectiva?
   - Que todas las sillas se ocupen

4) ¿Qué significa que f sea biyectiva?
   - Que a cada persona le corresponda una silla y que a cada silla le corresponda una persona

* Misma cantidad de sillas que de personas *

* f es una correspondencia 1 a 1 entre sillas y personas *



Ejemplo de Función Biyectiva

La función identidad

$$Id_A : A \to A$$
$$a \mapsto a$$

¿Inyectiva? Si

Dem.

Sean $a, b \in A$ y $a \neq b$, como $Id_A(a) = a$

$Id_A(b) = b \to Id_A(a) \neq Id_A(b)$ ■

¿Suprayectiva? Si

Dem.

Sea $a \in A$, como $Id_A(a) = a \to a \in Im(Id_A)$

$\therefore$ Id_A es biyectiva

Composición de inyectivas es inyectiva.

Teorema ♥ Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones inyectivas. Entonces $g \circ f: A \to C$ es inyectiva.

Dem.

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones inyectivas.

Queremos ver que $g \circ f: A \to C$ es inyectiva. $(g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \to a_1 = a_2)$

Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$.

Entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Como g es inyectiva $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ implica que $f(a_1) = f(a_2)$. Luego, como f es inyectiva $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$.

$\therefore$ $g \circ f$ es inyectiva.

Composición de suprayectivas es suprayectiva

Teorema ☺ Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones suprayectivas. Entonces $g \circ f: A \to C$ es suprayectiva.

Dem.

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones suprayectivas.

Queremos ver que $g \circ f: A \to C$ es suprayectiva. $(C \subseteq Im(g \circ f))$

Sea $c \in C$. Como g es suprayectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Luego como f es suprayectiva existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Sustituyendo $b = f(a)$ en $g(b) = c$ obtenemos $g(f(a)) = c$, es decir, $g \circ f(a) = c$. Entonces $c \in Im(g \circ f)$ $\therefore$ $C \subseteq Im(g \circ f)$

Se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva.

Composición de biyectivas es biyectiva.

Teorema.

Sean $f:A\to B$ y $g:B\to C$ funciones biyectivas.

Entonces $g\circ f:A\to C$ es biyectiva.

Dem.

Sean $f:A\to B$ y $g:B\to C$ funciones biyectivas.

Entonces f y g son inyectivas y suprayectivas.

Por Teorema ♥ tenemos que $g\circ f$ es inyectiva.

De teorema ◎ se tiene que $g\circ f$ es suprayectiva.

Lo que implica que $g\circ f$ es biyectiva. ■

Teoremas ♥ y ◎ están en la página anterior.

Teorema. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$. Entonces:

1) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

2) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva

Dem.

1)

Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva.

Queremos ver que f es inyectiva. ($f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$.

Aplicando g a $f(a_1)$ y $f(a_2)$ obtenemos que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, es decir $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$. Como $g \circ f$ es inyectiva entonces $a_1 = a_2$.

$\therefore$ f es inyectiva $\blacksquare$

2)

Supongamos que $g \circ f: A \to C$ es suprayectiva.

Queremos ver que g es suprayectiva. ($C \subseteq Im(g)$)

Sea $c \in C$. Como $g \circ f$ es suprayectiva, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$, es decir $g(f(a)) = c$. Luego, consideremos $b = f(a) \Rightarrow b \in B$ y $g(b) = c$. Lo que implica que $c \in Im(g)$ $\therefore$ $C \subseteq Im(g)$.

Concluimos que g es suprayectiva. $\blacksquare$

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.