

Lista de Ejercicios: Funciones y Cardinalidad

Unidad 3. Álgebra Superior 1

Profesores: Arilín Haro y Luis Jorge Sánchez Saldaña.
Selección de ejercicios hecha por Brenda Navarro.

A continuación encontrarán una lista de ejercicios sugeridos para que practiquen el contenido de esta unidad. Como verán, están separados por temas para que los vayan resolviendo de acuerdo al avance con las notas y los vídeos.

Funciones y Cardinalidad

Funciones: Definición, Imagen, Preimagen e igualdad de funciones

Ejercicio 1. Decide cuál de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Justifica tu respuesta y si sí es función encuentra su imagen.

i) $J = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$.

ii) $I = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x\}$

iii) $K = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x^2\}$

Ejercicio 2. Sean $A = \{, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

i) Determina todas las funciones f de A en B tales que $f(1) = a$.

ii) Determina todas las funciones f de A en B tales que $f(2) = f(3)$.

iii) Determina todas las funciones f de A en B tales que $f(2) \neq f(3)$ y $f(1) = c$.

Ejercicio 3. Sea $Y = \{-2, 0, 1\}$ y considera las funciones $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^2(x + 1) \quad g(x) = 2x$$

para cada $x \in Y$. ¿Las funciones son iguales? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 4. Las funciones f y g son llamadas **compatibles** si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Demuestra que f y g son compatibles si y sólo si $f \cup g$ es función.

Ejercicio 5. Definimos $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como $f(x, y) = x + y - 3xy$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$. Demuestra que

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Composición, inversa y restricción

Ejercicio 6. Sean $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funciones definidas por: $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ y

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

para cada $x \in \mathbb{Z}$. Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ (g \circ h)$ y $(f \circ g) \circ h$.

Ejercicio 7. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $f: X \rightarrow X$ la función dada por: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y $f(4) = 1$. Demuestra que existe una única función $g: X \rightarrow X$ tal que $g(1) = 3$ y $f \circ g = g \circ f$.

Ejercicio 8. Calcula la función inversa de la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que está definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 5$ para cada $x \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (1 - (1 + x^5))^{\frac{1}{4}}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Expresa a f como la composición de cuatro funciones, donde cada una de esas cuatro funciones es distinta a la función identidad en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x^2 + 1$. ¿La función f tiene inversa?, si sí tiene, encuéntrala. Si no tiene di por qué no y restringe el dominio de f de tal forma que si tenga inversa y encuéntrala.

Funciones Suprayectivas, Inyectivas y Biyectivas

Ejercicio 11. *Determina cuales de las siguientes funciones son inyectivas, en caso de que una función sea inyectiva demuestra que en efecto lo es y en caso contrario muestra un contraejemplo de porque no lo es.*

i) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

iii) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 12. Sean $f: A \twoheadrightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ y $h: B \rightarrow C$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Demuestra que $g = h$.

Ejercicio 13. *Determina cuales de las siguientes funciones son suprayectivas, en caso de que una función sea suprayectiva demuestra que en efecto lo es y en caso contrario muestra un contraejemplo de porque no lo es.*

ii) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

iii) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 14. Sean $f: B \hookrightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ y $h: C \rightarrow B$ tales que $f \circ h = f \circ g$. Demuestra que $g = h$.

Ejercicio 15. Sean $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ y $h: B \rightarrow C$. Construye ejemplos donde

i) $g \circ f$ sea inyectiva y g no lo sea.

ii) g sea inyectiva y $g \circ f$ no lo sea.

iii) f sea inyectiva y $g \circ f$ no lo sea.

iv) $g \circ f$ es suprayectiva y f no lo sea.

v) g sea suprayectiva y $g \circ f$ no lo sea.

vi) f sea suprayectiva y $g \circ f$ no lo sea.

Funciones biyectivas e invertibles

Ejercicio 16. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a y b es f biyectiva? ¿Para qué valores de a y b es f biyectiva con $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 17. Sean X, Y, Z y W conjuntos, sean $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ y $h: Z \rightarrow W$ funciones. Demuestra que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces f , g y h también son biyectivas.

Ejercicio 18. Sean $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funciones dadas por $f(n) = 2n$ y $g(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $g \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$ pero $f \circ g \neq Id_{\mathbb{Z}}$.

Ejercicio 19. Para las siguientes funciones muestre que son biyectivas y encuentra su inversa.

i) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $H: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $H(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ (1 - x)^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 20. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Encuentra una fórmula para $f \circ g$. Demuestra que $f \circ g$ es biyectiva y encuentra su inversa. Encuentra también una fórmula para $g \circ f$ y demuestra que $g \circ f$ es inyectiva pero no suprayectiva.

Cardinalidad

Ejercicio 21. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son finitos? Justifica tu respuesta.

- i) $\{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6, 8\}$
- ii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x(10 - x) > 0\}$
- iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$

Ejercicio 22. Sean A y B conjuntos. Demuestra que si A es finito entonces $A \cap B$ es finito.

Ejercicio 23. Sea $2\mathbb{N} = \{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad.

Ejercicio 24. Sean A , B , C y D conjuntos.

- i) Demuestra que $A \times B$ tiene la misma cardinalidad que $B \times A$.
- ii) Demuestra que para todo x , $A \times \{x\}$ tiene la misma cardinalidad que A .
- iii) Demuestra que si A tiene la misma cardinalidad que B y C tiene la misma cardinalidad que D , entonces $A \times C$ tiene la misma cardinalidad que $B \times D$.

Ejercicio 25. Sean A y B conjuntos con $A \subseteq B$. Demuestra que si B es finito y A tiene la misma cardinalidad que B , entonces $A = B$.

Relaciones de equivalencias y particiones

Ejercicio 26. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sean R, S, T y U relaciones en X donde:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (e, d), (c, a)\},$$

$$S = \{(a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (e, e), (d, e), (c, b)\},$$

$$T = \{(a, b), (a, a), (b, c), (b, b), (e, e), (b, a), (c, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\},$$

$$U = \{(a, b), (b, c), (b, b), (e, e), (b, a), (c, b), (d, d), (a, c), (c, a)\}.$$

- i) ¿Cuáles de estas relaciones son simétricas?
- ii) ¿Cuáles son reflexivas?
- iii) ¿Cuáles son transitivas?
- iv) ¿Cuáles son antisimétricas?

Ejercicio 27. Sea R una relación en $\mathbb{Z}$ tal que $(a, b) \in R$ si y sólo si $a^+a = b^2 + b$. Determina si es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

Ejercicio 28. Sea R una relación. Demuestra que:

- i) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} \subseteq R$.
- ii) R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.
- iii) R es transitiva y simétrica si y sólo si $R^{-1} \circ R = R$.

Ejercicio 29. Determina si la relación dada es una relación de equivalencia y si es así describe la partición inducida.

- i) $a \sim b$ en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $a + b$ es par.
- ii) $a \sim b$ en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $a + b$ es impar.
- iii) $x \sim y$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si $|x| = |y|$.

Ejercicio 30. Demuestra que la relación $\sim$ en $\mathbb{Z}$ dada por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } (x = y) \vee (x + y = 3),$$

es de equivalencia.