

Tarea 4: Álgebra Superior I

Agosto de 2020

Esta es una tarea de 100 puntos. Cada ejercicio tiene marcado su valor. Si la respuesta es correcta y completa tendrás el total de puntos. En caso de estar incompleto o incorrecto, se asignarán los puntos proporcionales a la parte correcta de la respuesta. La entrega de CADA EJERCICIO se deberá hacer POR SEPARADO en el trabajo de clase correspondiente.

Quienes estén de oyentes deberán agregar a cada entrega la leyenda “Estoy de oyente”. De la misma manera, los alumnos que sí están inscritos en el curso deberán agregar el mensaje “Soy alumno inscrito”.
¡Éxito!

Ejercicio 1. Demuestra por inducción matemática que las siguientes ecuaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Solución:

a) Sea

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}.$$

Notemos que $1 \in S$, pues $1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6}$ es cierto.

Ahora veamos que S es un conjunto inductivo. Supongamos que $m \in S$, entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ es cierto (Hipótesis Inductiva). Luego, usando la hipótesis inductiva, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[2m^2 + m + 6m + 6]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[2m^2 + 7m + 6]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[(m+2)(2m+3)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Por tanto, $m+1 \in S$, es decir, siempre que $m \in S$ se cumple que $m+1 \in S$. Como S es un conjunto inductivo y $1 \in S$, por el Principio de Inducción Matemática tenemos que $S = \mathbb{N}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Sea

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \right\}.$$

Notemos que $1 \in S$, pues $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$ es cierto.

Ahora veamos que S es un conjunto inductivo. Supongamos que $m \in S$, entonces $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{m}{2m+1}$ es cierto (Hipótesis Inductiva). Luego, usando la hipótesis de inducción en la siguiente igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)} = \\ &= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} \\ &= \frac{m(2m+3) + 1}{(2m+1)(2m+3)} \\ &= \frac{m(2m+3) + 1}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{2m^2 + 3m + 1}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{(m+1)(2m+1)}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{m+1}{2(m+1)+1} \end{aligned}$$

Por tanto, $m+1 \in S$, es decir, siempre que $m \in S$ se cumple que $m+1 \in S$. Como S es un conjunto inductivo y $1 \in S$, por el Principio de Inducción Matemática tenemos que $S = \mathbb{N}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Ejercicio 2. Demuestra por inducción matemática las siguientes desigualdades:

- a) $2n + 1 \leq 2^n$, $n = 3, 4, \dots$
b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para $x \geq -1$ y $n \geq 1$.

Ejercicio 3. Responde cada pregunta, justifique su respuesta. Con los números 2, 5, 7 y 9:

1. ¿Cuántos números de tres cifras puedes formar?
2. ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?
3. ¿Cuántos cocientes diferentes puedes formar?
4. ¿Cuántos de los números del apartado 2) son pares?

Solución:

1. Tenemos que en este caso se permiten repetir cifras y el orden importa, pues el orden en el que aparecen los dígitos determina al número. Por lo tanto el resultado es $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.
2. Ya que en este caso no se permiten repetir cifras y el orden importa, el resultado es $4 \times 3 \times 2 = 24$.
3. Tenemos que para toda $a, b \in A = \{2, 5, 7, 9\}$ se cumple que si $a \neq b$, entonces $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible, por lo que si $a, b, c, d \in A$ entonces $a \neq c$ o $b \neq d$ implica que $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Por lo que si tomamos los cocientes donde el numerador es distinto al denominador tenemos $2\binom{4}{2}$ ya que estamos contando los subconjuntos de cardinalidad dos de A y los contamos dos veces ya que si $a, b \in A = \{2, 5, 7, 9\}$ y $a \neq b$, entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$. Por último, nos falta considerar el caso donde el numerador es igual al denominador, pero en este caso tenemos que $1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \frac{9}{9}$, por lo que en este caso solo tenemos un posible cociente. Por lo tanto, el número total de cocientes posibles es $2\binom{4}{2} + 1 = 13$.
4. Observemos que para que un número sea par es necesario y suficiente que su último dígito también lo sea, por lo cual, si no fijamos en el inciso 2) tenemos que únicamente contar los números con 3 dígitos no repetidos, todos en A , cuyo último dígito sea 2. Por lo que estos están determinados por sus otros dos dígitos que se encuentran en $A - \{2\}$, y como en este caso si nos importa el orden, tenemos que en total tendremos $3 \times 2 = 6$ números con estas condiciones.

Ejercicio 4. Responde cada pregunta, justifique su respuesta:

1. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con los 8 vértices de un octágono?;

2. *En alguna institución hipotética a cada miembro se le asigna como clave el número que resulta de lanzar un dado 4 veces y escoger un número impar entre 0 y 20. ¿Cuántas posibles claves hay?*
3. *En una carrera donde participan 12 felices caballos y Wini, ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir los premios los cuales son: la medalla de oro, la de plata, la de bronce y una salchicha, sabiendo que Wini ganará la salchicha y que cada participante solo puede ganar un premio?*

Ejercicio 5. *Use el teorema del binomio para demostrar que*

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Ejercicio 1. Demuestra por inducción matemática que las siguientes ecuaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

Solución:

a) Sea

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}.$$

Notemos que $1 \in S$, pues $1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6}$ es cierto.

Ahora veamos que S es un conjunto inductivo. Supongamos que $m \in S$, entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ es cierto (Hipótesis Inductiva). Luego, usando la hipótesis inductiva, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[2m^2 + m + 6m + 6]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[2m^2 + 7m + 6]}{6} \\ &= \frac{(m+1)[(m+2)(2m+3)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Por tanto, $m+1 \in S$, es decir, siempre que $m \in S$ se cumple que $m+1 \in S$. Como S es un conjunto inductivo y $1 \in S$, por el Principio de Inducción Matemática tenemos que $S = \mathbb{N}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Sea

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \right\}.$$

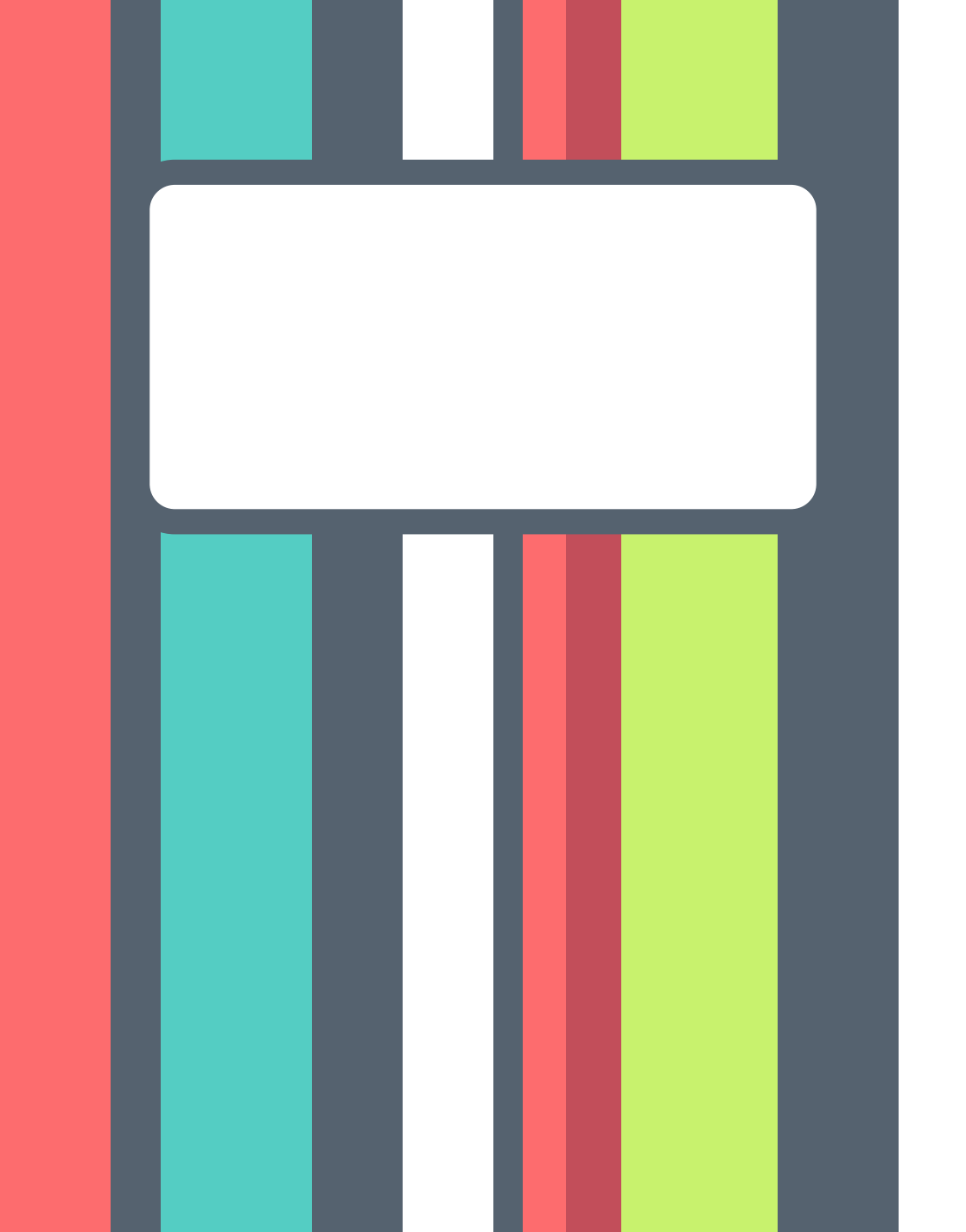
Notemos que $1 \in S$, pues $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$ es cierto.

Ahora veamos que S es un conjunto inductivo. Supongamos que $m \in S$, entonces $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{m}{2m+1}$ es cierto (Hipótesis Inductiva). Luego, usando la hipótesis de inducción en la siguiente igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)} = \\ &= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} \\ &= \frac{m(2m+3) + 1}{(2m+1)(2m+3)} \\ &= \frac{m(2m+3) + 1}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{2m^2 + 3m + 1}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{(m+1)(2m+1)}{(2m+1)(2(m+1)+1)} \\ &= \frac{m+1}{2(m+1)+1} \end{aligned}$$

Por tanto, $m+1 \in S$, es decir, siempre que $m \in S$ se cumple que $m+1 \in S$. Como S es un conjunto inductivo y $1 \in S$, por el Principio de Inducción Matemática tenemos que $S = \mathbb{N}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$



Ejercicio 2.

a) Base de inducción. Si $n=3$, entonces

$$2(3)+1 = 6+1 = 7 \leq 2^{(3)} = 8.$$

Por lo tanto el problema es cierto en este caso.

Hipótesis de inducción. Sea $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ tal que el enunciado es cierto, es decir

$$2n+1 \leq 2^n.$$

Paso inductivo: Mostremos que el enunciado es cierto para $n+1$.

(eq. 1) $2(n+1)+1 = 2n+2+1 = (2n+1)+2 \leq 2^n+2$ aquí usamos la hip de inducción.

Por otro lado $2^n+2 \leq 2^{n+1} = 2(2^n) = 2^n+2^n \Leftrightarrow 2 \leq 2^n$
eq. 2 $\Leftrightarrow 1 \leq 2^{n-1}$

y esto último es cierto porque $n \geq 3$ y por lo tanto $n-1 \geq 2$
así que $2^{n-1} \geq 4$.

De la eq. 1 y la eq. 2 obtenemos

$$2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$$

Por lo tanto el enunciado es cierto para $n+1$ y esto termina nuestra demostración. 

b) Sea $x \geq -1$. La inducción correva sobre n .

Base de inducción. Si $n=1$, entonces

$$(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$$

Por lo tanto el enunciado es cierto para $n=1$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el enunciado es cierto para n , es decir,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Paso de inducción. Demostremos el enunciado para $n+1$.

$$(eq. 1) \quad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \quad \begin{array}{l} \text{por hipótesis de ind.} \\ \text{y porque } x \geq -1 \\ \text{y por lo tanto} \\ 1+x \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado } (eq. 2) \quad (1+nx)(1+x) &\geq 1+(n+1)x \Leftrightarrow \underline{1+x} + \underline{nx} + \underline{nx^2} \geq \underline{1+nx} + \underline{x} \\ &\Leftrightarrow nx^2 \geq 0 \end{aligned}$$

lo último es cierto porque $n \geq 1$ y $x^2 \geq 1$.

De la eq. 1 y 2 obtenemos

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Así que el enunciado es cierto para $n+1$ y terminamos la demostración. $\square$

Ejercicio 3.

1) Para formar cifras (posiblemente con dígitos repetidos) tengo que rellenar 3 posiciones

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} = 64$$

En cada posición tengo 4 posibles cifras: 2, 5, 7, 9.

La respuesta es 64.

2) Para formar cifras de 3 dígitos tengo que rellenar 3 posiciones

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 24$$

En la primer posición puedo poner cualquiera de entre 2, 5, 7, 9.

En la segunda posición puedo poner cualquiera de mis 4 posibles dígitos salvo el que usé en mi primer posición.

Y análogamente sólo tengo dos posibilidades para mi tercer posición.

La respuesta es 24.

3) Si escojo 2 dígitos diferentes tengo 4 posibilidades para el numerador y 3 para el denominador. Así tengo

12 posibles fracciones. Todas estas fracciones me dan cocientes diferentes porque mis dígitos no tienen factores en común y por lo tanto todas las fracciones son irreducibles. Como dos fracciones irreducibles son iguales si coinciden sus numeradores y denominadores son iguales, concluimos que obtengo 12 diferentes cocientes.

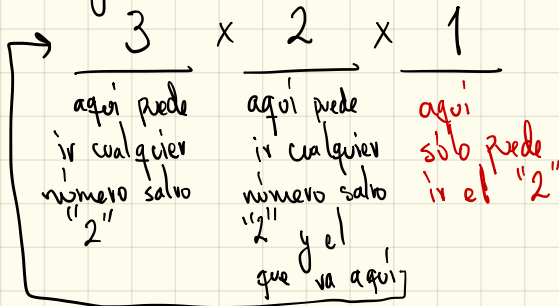
Si escojo el mismo numerador y denominador obtengo

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \frac{9}{9} = 1.$$

En total obtengo 13 diferentes cocientes.

4. Un número es par si el dígito de las unidades es igual a 0, 2, 4, 6 u 8.

En mi caso el dígito es par si el dígito de las unidades es 2. Así que ahora los chances para mis posiciones quedan como sigue:



La respuesta es
 $3 \times 2 \times 1 = 6$.