Trigonometría

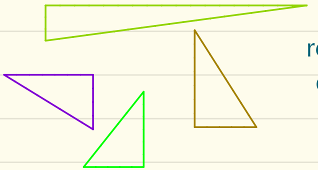
+ Razones trigonométricas
+ Grados y radianes.
+ Ángulos notables
+ Resolución de triángulos rectángulo
+ Ley de senos y leyes de cosenos
+ Resolución de triángulos.

Arilin's Math World

Trigonometría

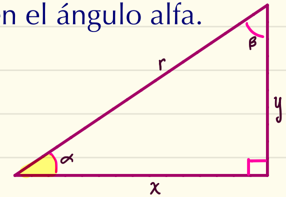
Antes de hablar de razones trigonométricas empecemos por hablar de los triángulos involucrados.

Por supuesto empezaremos con triángulos rectángulo.



Sobre los triángulos rectángulo debemos recordar que el lado más grande es la hipotenusa y que los catetos forman un ángulo de 90°.

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo y fijémonos en el ángulo alfa.



Para alfa en lado "x" es el cateto adyacente, CA, pues está pegado alfa. A su vez en lado "y" es el cateto opuesto, CO. Además "r" es la hipotenusa, H, del triángulo.

Ahora definamos las razones trigonométricas

Notemos algunas cosas:

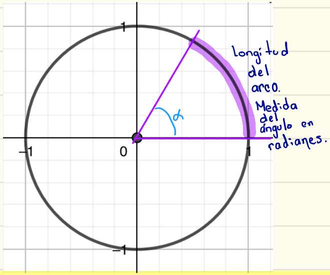
1. Como r es mayor que x y que y, entonces $\frac{x}{r} < 1$ y $\frac{y}{r} < 1$
2. Los ángulos α y β suman 90°
3. Del teorema de Pitágoras tenemos $r^2 = x^2 + y^2$
4. Si consideramos los triángulos "degenerados" —— y | donde uno de los catetos es nulo entonces tenemos $\frac{x}{r} = 1$ y $\frac{y}{r} = 1$ respectivamente.

Nombre	Notación	Fórmula	Fórmula
Coseno	$\cos\alpha$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{x}{r}$
Seno	$\text{Sen}\,\alpha$	$\frac{CO}{H}$	$\frac{y}{r}$
Tangente	$\tan\alpha$	$\frac{CO}{CA}$	$\frac{y}{x}$
Secante	$\sec\alpha$	$\frac{H}{CA}$	$\frac{r}{x}$
Cosecante	$\csc\alpha$	$\frac{H}{CO}$	$\frac{y}{x}$
Cotangente	$\cot\alpha$	$\frac{CA}{CO}$	$\frac{x}{y}$

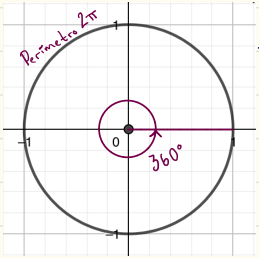
Estaremos usando frecuentemente las primeras tres, seno, coseno y tangente.

Midiendo ángulos: Grados y Radianes

Pensemos en un círculo unitario y tratemos de establecer una relación entre un ángulo y la longitud de arco (perímetro) que recorremos con dicho ángulo.



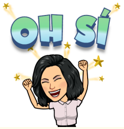
Sabemos que el perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$.



De aquí que 2π se corresponde con $360°$.

Dividimos ambas cantidades entre 2 para obtener $\pi = 180°$.

Con esta equivalencia puedo usar la regla de tres para conocer la longitud de arco, x, respecto al ángulo α y viceversa.



radianes grados

$$\frac{\pi}{x} = \frac{180°}{\alpha}$$

$x = \pi\left(\frac{\alpha}{180°}\right)$ De grados a radianes

$\alpha = 180°\left(\frac{x}{\pi}\right)$ De radianes a grados

Notemos que si quisieramos calcular la longitud de arco respecto a un ángulo α para un círculo de radio r tendríamos que multiplicar los radianes por r obteniendo la fórmula

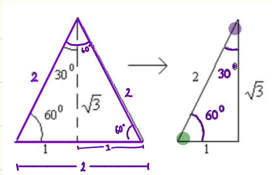
$$\text{long. arco} = r\pi\left(\frac{\alpha}{180°}\right)$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables

Llamamos a los ángulos de 30°, 45° y 60° como ángulos notables.

Ahora calculemos las funciones trigonométricas de dichos ángulos.

Consideremos el triángulo equilátero y tracemos su altura para obtener el siguiente triángulo rectángulo.



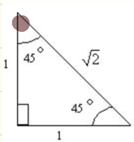
Al posicionarnos en el ángulo de arriba tenemos

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{Sen} 30° = \frac{1}{2}$ $\operatorname{Tan} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

al posicionarnos en el ángulo izquierdo tenemos

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\operatorname{Sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{Tan} 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

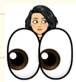
Para calcular las razones trigonométricas de 45° consideremos el triángulo



$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

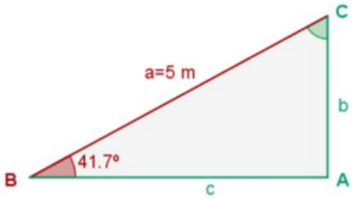
$\operatorname{Sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

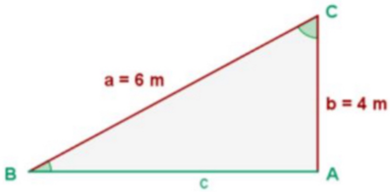
$\operatorname{Tan} 45° = \frac{1}{1} = 1$



Aplicación de razones trigonométricas para la resolución de triángulos.

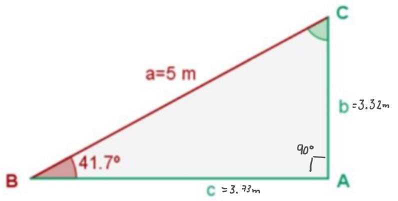
Encuentra las medidas de los lados y ángulos faltantes de cada triángulo.

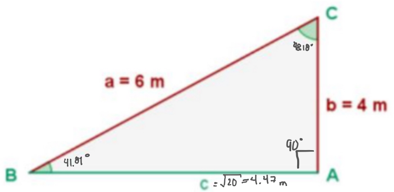




Aplicación de razones trigonométricas para la resolución de triángulos.

Encuentra las medidas de los lados y ángulos faltantes de cada triángulo.





- Calcular b.

$$\text{Sen } 41.7° = \frac{b}{5} \rightarrow b = (5m)\text{Sen } 41.7° \approx 3.32 m$$

- Calcular c.

$$\text{Cos } 41.7 = \frac{c}{5} \rightarrow c = (5m)\text{Cos } 41.7 = 3.73 m$$

- Calcular el ángulo C.

$$90° + 41.7° + C = 180° \rightarrow C = 180° - 90° - 41.7°$$

- Calcular c

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 6^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\rightarrow c = \sqrt{20} \text{ m}$$

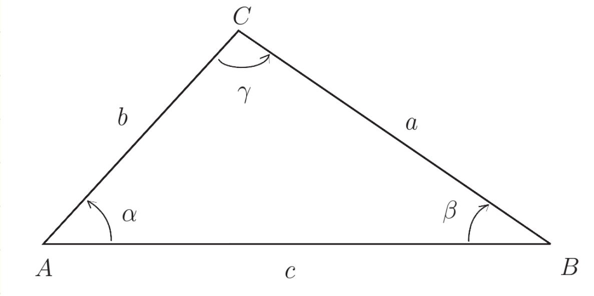
- Calcular el ángulo B.

$$\text{Sen } B = \frac{4}{6} \rightarrow B = \text{Arc Sen}\left(\frac{4}{6}\right) \approx 41.81$$

- Calcular el ángulo C.

$$\text{Cos } C = \frac{4}{6} \rightarrow C = \text{Arc Cos}\left(\frac{4}{6}\right) \approx 48.18$$

Leyes para todos los triángulos



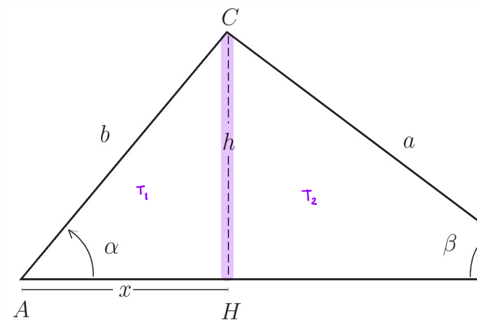
Ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\,\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\,\gamma},$$

Haremos la demostracion de la primer igualdad. Las otras igualdades se pueden probar de manera similar.

Dem. Empecemos por calcular Sen α y Sen β. Para esto la altura h nos servirá como cateto opuesto para α y también para β.

$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{h}{b}$, $\operatorname{Sen}\beta = \frac{h}{a}$ $\rightarrow$ $h = b\operatorname{Sen}\alpha$ y $h = a\operatorname{Sen}\beta$ $\rightarrow$ $b\operatorname{Sen}\alpha = a\operatorname{Sen}\beta$ $\rightarrow$ $\frac{b}{\operatorname{Sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{Sen}\alpha}$



Leyes de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\,\alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\,\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\,\gamma.$$

Demostraremos la primer equación; las otras se hacen de la misma manera.

Dem. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos T_1 y T_2 obtenemos. $b^2 = x^2 + h^2$ y $a^2 = (c-x)^2 + h^2$. Despejando h^2 e igualando el resultado de cada ecuación tenemos $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, luego $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, lo que implica $a^2 = b^2 + c^2 - 2xc$. Como $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{x}{b}$ entonces $x = b\operatorname{Cos}\alpha$. Sustituyendo x en la ecuacion $a^2 = b^2 + c^2 - 2xc$ queda $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\operatorname{Cos}\alpha$, tal como queríamos.

Aplicación de razones trigonométricas para la resolución de triángulos.

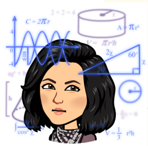
Encuentra las medidas de los lados y ángulos faltantes de cada triángulo.

1) Sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

2) Sabiendo que tiene un lado de 3m cuyos angulos adyacentes son de 60° y 95°.

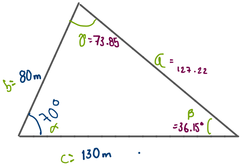
Ejercicios

Aplicación de razones trigonométricas para la resolución de triángulos.



Encuentra las medidas de los lados y ángulos faltantes de cada triángulo.

1) Sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



Los datos de este triángulo me permiten usar la ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = (80\,m)^2 + (130\,m)^2 - 2(80\,m)(130\,m)\cos(70°) = 64000 + 16900 - 20800\cos(70°) \approx 16185.98$$

$$\rightarrow a \approx \sqrt{16185.98} \approx 127.22$$

Ahora ya puedo usar ley de senos para calcular β.

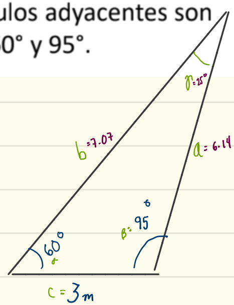
$$\frac{b}{\operatorname{Sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{Sen}\alpha} \rightarrow \frac{80\,m}{\operatorname{Sen}\beta} = \frac{127.22\,m}{\operatorname{Sen} 70°} \rightarrow \operatorname{Sen}\beta = (80\,m)\left(\frac{\operatorname{Sen} 70°}{127.22\,m}\right) \approx 0.59$$

$$\rightarrow \beta \approx \operatorname{ArcSen}(0.59) \approx 36.15°$$

Para calcular γ usaré que la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°

$$\gamma = 180° - 70° - 36.15° = 73.85°$$

2) Sabiendo que tiene un lado de 3m cuyos angulos adyacentes son de 60° y 95°.



Empezaré por calcular γ

- $\gamma = 180° - 95° - 60° = 25°$

Ahora con ley de senos calcularé a y b

(a) $\frac{a}{\operatorname{Sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{Sen}\gamma} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{Sen} 60} = \frac{3m}{\operatorname{Sen} 25} \rightarrow a = \left(\frac{3m}{\operatorname{Sen} 25}\right)(\operatorname{Sen} 60) = 6.14m$

(b) $\frac{b}{\operatorname{Sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{Sen}\gamma} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{Sen} 95} = \frac{3m}{\operatorname{Sen} 25} \rightarrow b = \left(\frac{3m}{\operatorname{Sen} 25}\right)(\operatorname{Sen} 95) \approx 7.07$

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Ejercicios tomados de:
https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/ejercicios/Ejercicios%20de%20resolucion%20de%20triangulos.pdf