Álgebra Lineal I
Unidad 3: Tarea examen

1. (2 pts) Considera las formas lineales en $\mathbb{R}^3$

   $$l_1(x,y,z) = 2x+4y+z, \qquad l_2(x,y,z) = 4x+2y+3z, \qquad l_3(x,y,z) = x+y.$$

   a) Demuestra que l_1, l_2, l_3 forman una base del dual del $\mathbb{R}^3$.

   b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual sea l_1, l_2, l_3.

2. (2 pts) Sean V un espacio vectorial y W_1, W_2, W_3 subespacios de V. Demuestra que

   $$(W_1 + W_2 + W_3)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \cap W_3^{\perp}.$$

3. (3 pts) Considera a $M_2(\mathbb{R})$ con el producto interior de Frobenius, es decir, para el cual $\langle A, B\rangle = \text{traza}({}^tAB)$ Sabemos que éste es un producto interior, por lo cual podemos hablar de normas, distancias y ángulos en este espacio. Considera las siguientes matrices:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

   Responde lo siguiente:

   - ¿Cuál pareja de estas matrices son las más cercanas entre sí?
   - ¿Qué ángulo hacen las matrices A y C entre sí?
   - ¿Cuál de estas matrices tiene mayor norma?

4. (3 pts) Considera la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)+x_3y_3$$

   a) Verifica que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interior sobre $\mathbb{R}^3$.

   b) Aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y da una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ equipado con este producto interior.

5. (+2 pts extra) Considera la función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = t^2$ para $t \in [-\pi, \pi]$.

   a) Calcula los coeficientes de Fourier de f.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

b) Usando el teorema de Plancherel, demuestra la siguiente identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721