Álgebra Lineal I
Unidad 4: Tarea examen

1. (2 pts) Calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Justifica de manera explícita las propiedades o resultados de determinante que estás usando.

2. (2 pts) Diagonaliza la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Usando esto, o de otra forma, encuentra y demuestra una fórmula para B^n.

3. (3 pts) Resuelve los siguientes ejercicios:

   a) Decimos que una matriz M en $M_n(\mathbb{R})$ es *nilpotente* si $M^k = O_n$, para algún entero positivo k. Demuestra que si M es nilpotente, entonces $\det M = 0$.

   b) Decimos que una matriz $Q \in M_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si ${}^tQQ = I_n$. Demuestra que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

   c) Decimos que una matriz P en $M_n(\mathbb{R})$ es idempotente si $P^2 = P$. ¿Que posibles valores pueden tener los eigenvalores de P? Encuentra ejemplos de matrices para todas las posibilidades.

4. (3 pts) Para cada forma de elegir seis números reales a, b, c, u, v, w, determina si el siguiente sistema lineal en variables x, y, z tiene o no solución

$$\begin{cases} ax - by \phantom{{}-cz} = u \\ by - cz = v \\ -ax \phantom{{}-by} + cz = w. \end{cases}$$

   Cuando el sistema sí tenga solución, determina la dimensión del espacio de soluciones y da una base.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

5. (+2 pts extra) Las entradas de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ están entre -1 y 1. Demuestra que

$$|\det A| \leq n^{n/2}.$$

Sugerencia. Usa la desigualdad de Hadamard.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721