Álgebra Lineal I
Unidad 2: Tarea en equipo

1. Sea $V = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i - j \text{ es impar}\}$.

   a) Prueba que V es un subespacio vectorial de $M_4(\mathbb{R})$.

   b) Prueba que para cualesquiera $A, B \in V$ se tiene que $AB \in V$.

   c) Encuentra la dimensión de V.

2. Sea V el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^6$ que son soluciones reales del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 - 3x_5 + \ \ x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$$

   a) Demuestra que $S = \{(0, -1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1, 0)\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente.

   b) Extiende S a una base para V.

   c) Extiende la base encontrada en el inciso anterior a una base para $\mathbb{R}^6$.

3. Considera a $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = \overline{z}$, donde $\overline{z}$ es el conjugado complejo de z. Considera los siguientes conjuntos: $\mathcal{B} = \{1, i\}$ y $\mathcal{B}' = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$

   a) Prueba que T es una transformación lineal.

   b) Prueba que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $\mathbb{C}$.

   c) Encuentra $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

   d) Encuentra $\mathrm{Mat}(T)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

4. Sea T una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Verifica que $A^2 = 2A$.

   b) Deduce que $T(v) = 2v$ para todo $v \in \mathrm{Im}(T)$.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

c) Prueba que $\ker(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$ están en posición de suma directa en $\mathbb{R}^3$.

d) Encuentra bases para $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, y escribe la matriz asociada a T con respecto a las base de $\mathbb{R}^3$ obtenidas de completar las bases de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, respectivamente.

5. Resuelve los siguientes incisos:

   a) Prueba que para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se tiene

   $$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\,{}^tAA).$$

   Sugerencia: Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna tal que ${}^tAAx = 0$, escribe ${}^tx\,{}^tAAx = 0$ y expresa el lado izquierdo como una suma de cuadrados.

   b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$. Encuentra el rango de A y ${}^tAA$ y concluye que el inciso *a*) no es necesariamente cierto si $\mathbb{R}$ es reemplazado por $\mathbb{C}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721