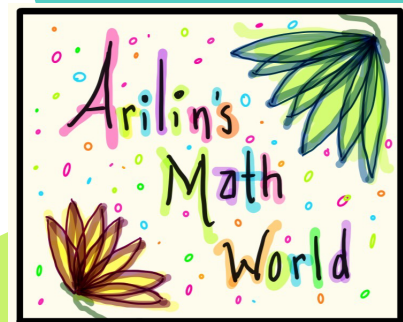
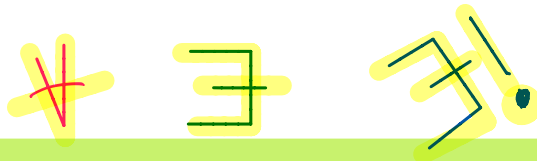


Demostraciones con cuantificadores





Demostraciones con cuantificadores

	$(\forall x) (P(x))$ Para todo x se cumple $P(x)$	$(\exists x) (P(x))$ Existe x tal que se cumple $P(x)$
$(\forall x) (P(x))$ Para todo x se cumple $P(x)$	Tomar un x arbitrario y verificar que cumple $P(x)$	Dar un contra ejemplo, i.e. exhibir un x que no cumpla $P(x)$
$(\exists x) (P(x))$ Existe x tal que se cumple $P(x)$	Dar un ejemplo, e.i. exhibir un x tal que $P(x)$ se cumple.	Demostrar que $P(x)$ es falso para toda x.
$(\exists! x) (P(x))$ Existe un único x para el que se cumple $P(x)$	Dar un ejemplo, e.i. exhibir un x tal que $P(x)$ se cumple y demostrar unicidad, e.i. demostrar que si otro x' cumple $P(x')$ entonces $x = x'$.	Demostrar que $P(x)$ es falsa para toda x, o bien, exhibir dos elementos diferentes x y x' tales que $P(x)$ y $P(x')$ son ciertos.

Ejemplo

$$(\exists x)P(x)$$

Demostración constructiva.

Ej. Existe un primo que es par.

Dem. El número 2 es primo y es par. $\square$

Ej. Existe un primo que es impar.

Dem. El número 7 es primo y es impar. $\square$



Ejemplo $(\exists!x)(P(x))$

Ej. Todo número real no cero tiene un único inverso multiplicativo.

Dem. Sea $x \neq 0$ un número real.

Existencia) Sea $y = \frac{1}{x}$. Como $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$. Entonces $xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
Por lo tanto y es un inverso multiplicativo de x .

Unicidad) Sean y, z multiplicativos inversos de x . Entonces

$$xy = 1 \text{ y } xz = 1, \text{ así que}$$

$$xy = xz$$

$$\cdot xy - xz = 0$$

$$x(y - z) = 0$$

Como $x \neq 0$, $y - z = 0$. Así que $y = z$.



Ejemplo $(\forall x)(P(x))$

Para cualesquiera números racionales x e y , $\frac{x+y}{2}$ es racional.

Dem: Sean $x, y \in \mathbb{Q}$. Entonces existen $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $q \neq 0, s \neq 0$ y $x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}$. Luego

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{ps+rq}{2qs}$$

Como $ps+rq \in \mathbb{Z}$, $2qs \in \mathbb{Z}$ y $2qs \neq 0$, tenemos que $\frac{x+y}{2}$ es racional. $\square$



Demostrar que los siguientes enunciados son falsos.



Enunciado 1. Todos los números son pares.

Este enunciado es falso pues el 3 es un número que no es par.

Enunciado 2. El único entero mayor que 5 es el 7.

Este enunciado es falso pues el número 6 es un entero mayor que 5 y diferente a 7.

Enunciado 3. Existe un número natural negativo.

Súper falso.

Por definición todos los naturales son mayores que 0 y por lo tanto no son negativos.

✚ Imágenes creadas con Bitmoji.

✚ Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World.

✚ Notas basadas en el video de Luis Jorge Sánchez Saldaña, puedes visitar su canal
https://www.youtube.com/channel/UCmF6r_udwPhwlkyAocDyKWw

✚ Recuerda visitar:

- * mi canal Arilin's Math y
- * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.

