

Tarea 1

Álgebra Superior I

Julio de 2020

Esta es una tarea de 100 puntos. Cada ejercicio tiene marcado su valor. Si la respuesta es correcta y completa tendrás el total de puntos. En caso de estar incompleto o incorrecto, se asignarán los puntos proporcionales a la parte correcta de la respuesta. La entrega de CADA EJERCICIO se deberá hacer POR SEPARADO en el trabajo de clase correspondiente.

Quienes estén de oyentes deberán agregar a cada entrega la leyenda “Estoy de oyente”. De la misma manera, los alumnos que sí están inscritos en el curso deberán agregar el mensaje “Soy alumno inscrito”.

Publicada el martes 28 de julio a las 5 pm para entregar antes de las 11 am del sábado 1 de agosto.

¡Éxito!

Ejercicio 1. (20 puntos) *Niega las siguientes proposiciones:*

1. *-8 es un número negativo;*
2. *Si n es un número par, entonces n^2 es par.*
3. *Todas las gallinas son azules.*

Solución.

1. La negación de esta proposición sería “ -8 no es un número negativo”, o equivalentemente, “ -8 es mayor o igual que cero”.
2. En este inciso, tenemos una implicación $P \Rightarrow Q$, donde $P = “n$ es un número par” y $Q = “n^2$ es par”.
3. En este caso, tenemos una proposición del tipo $\forall x : P(x)$. Por lo que en este caso debemos negar el cuantificador “para todo”, es decir, debemos

cambiarlo por un “existe”, ya que como vimos en las notas $\neg(\forall x : P(x))$ es equivalente a $\exists x : \neg P(x)$. Por lo tanto la negación de este inciso sería “Existe una gallina que no es azul”, otra forma de enunciarlo sería “Existe al menos una gallina que no es azul”.

Ejercicio 2. (20 puntos) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas:

1. $[p \implies (q \wedge r)] \iff [(p \implies q) \wedge (p \implies r)];$
2. $[(p \vee q) \implies r] \iff [(p \implies r) \wedge (q \implies r)]$
3. $[p \implies (q \vee r)] \iff [\neg r \implies (p \implies q)]$

Las tablas de verdad están al final del documento.

Ejercicio 3. (20 puntos) Para cada una de las siguientes proposiciones enuncie la recíproca y la contrapositiva. Determine también el valor de verdad de cada proposición dada, así como el valor de verdad de su recíproca y su contrapositiva.

1. Sean m y n números enteros positivos. Si $m > n$ entonces $m^2 > n^2$.

Solución. La recíproca sería: *Sean m y n son números enteros positivos. Si $m^2 > n^2$ entonces $m > n$.* Esto es cierto.

La contrapositiva sería: *Sean m y n números enteros positivos. Si $m^2 \leq n^2$, entonces $m \leq n$.* Demostremosla: sean m, n son números enteros positivos tales que $m^2 \leq n^2$, entonces $m \leq n$.

Sabemos que:

$$m^2 - n^2 = (n + m)(m - n) \quad (1)$$

La suma $n + m$ es positiva.

Ahora sí demostremos cada uno de los enunciados.

Si $m^2 > n^2$, entonces $m^2 - n^2 > 0$ y por lo tanto en la ecuación (1), el lado derecho es positivo, y como el primer factor es positivo concluimos que el segundo factor es positivo. Es decir, $m - n > 0$. Por lo tanto $m > n$. Esto demuestra el enunciado original.

Demostremos la recíproca. Supongamos $m > n$, entonces en la igualdad (1), el lado derecho el primer factor es positivo y el segundo también, por lo tanto el lado izquierdo es positivo. Por lo tanto $m^2 - n^2 > 0$. Concluimos que $m^2 > n^2$.

Para la contrapositiva usamos que es equivalente al enunciado original y por lo tanto también es cierta.

2. Sean a y b números enteros. Si $a > b$ entonces $a^2 > b^2$.

Solución.

El enunciado original no es cierto. Si $a = 1$ y $b = -5$, entonces $a > b$ pero $a^2 = 1 < b^2 = 25$.

La recíproca sería: Sean a y b números enteros. Si $a^2 > b^2$ entonces $a > b$. Esto no necesariamente es cierto, pues $b = -2$ y $a = -3$, y si bien $(-3)^2 > (-2)^2$, sucede que $-3 < -2$.

Como la contrapositiva es equivalente al enunciado original, entonces también la contrapositiva es falsa.

3. Todo entero que es divisible entre 12 también es divisible entre 4.

Solución. La recíproca a ésta proposición sería: *Todo entero que es divisible entre 4 también es divisible entre 12*. Esto, en general, no es cierto, pues el número 4 es divisible entre 4, pero no es divisible entre 12.

La contrapositiva sería *Todo entero que no es divisible entre 4 tampoco es divisible entre 12*. Esto es cierto. Podemos demostrar el enunciado original, y sería equivalente al contrapositivo.

Supongamos que n es un número divisible entre 12, es decir, n es de la forma $12k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora observemos que $12 = (3)(4)$, entonces, asociando $(3)(k) = 3k$ y haciendo $3k = m$, n puede ser reescrito como:

$$n = 12k = (3)(4)k = (4)(3k) = 4m$$

por lo tanto, n también es divisible entre 4.

Definición 1. Sean a, b números enteros. Decimos que a divide a b si existe un número entero n tal que $b = an$.

Ejercicio 4. (20 puntos) Usando la definición anterior demuestra directamente las siguientes proposiciones: Sean a, b, c números enteros

1. Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|cx + by$ para cualquiera enteros x, y ;
2. Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.

Solución:

1. Si $a|b$ y $a|c$, entonces por la definición 1, existen enteros n y m tales que $b = na$ y $c = ma$. Sean x, y enteros, si multiplicamos los dos lados de la primera igualdad por y , obtenemos:

$$by = (na)y = (an)y = a(ny) \quad (2)$$

si en $c = ma$ multiplicamos en los dos por x , obtenemos:

$$cx = (ma)x = (am)x = a(mx). \quad (3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3) obtenemos que

$$cx + by = a(mx) + a(ny) = a(mx + ny). \quad (4)$$

Como m , n , y y x son enteros se sigue que $mx + ny$ es entero. Por la definición 1 y la ecuación (4), se obtiene que a divide a $cx + by$. Además x y y son enteros arbitrarios, de ahí que para cualesquiera x y y enteros se satisface que a divide a $cx + by$.

2. Si $a|b$ y $b|a$, por la definición 1, existen enteros n y m tales que

$$b = na \quad (5)$$

y

$$a = mb. \quad (6)$$

Si $a = 0$, entonces usando ecuación (5), $b = na = n0 = 0 = a$ y obtenemos $a = b$. De la misma forma, si $b = 0$ usando ecuación (6) obtenemos que $a = b$.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Sustituyendo ecuación (6) en la ecuación (5) obtenemos $b = na = n(mb) = (nm)b$ y como $b \neq 0$ podemos cancelar b , entonces $1 = nm$. Como n y m son enteros la única forma en la que se satisface la igualdad $1 = nm$ es que $n = m = 1$ ó $n = m = -1$. Si $n = m = 1$, $a = b$. Si $n = m = -1$, $a = -b$.

Ejercicio 5. (20 puntos) *Demuestra por contradicción la siguiente proposición: En un triángulo recto no degenerado la longitud de la hipotenusa es menor estricto que la suma de las longitudes de los dos lados restantes. Sugerencia: Usar el teorema de Pitágoras.*

Solución.

Supongamos lo contrario, sean a, b los catetos y c la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo tales que $a + b \leq c$. Como tanto $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ (como estamos considerando un triángulo no degenerado), entonces elevar al cuadrado preserva la desigualdad y así obtenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$$

pero la parte derecha de la expresión es igual a $a^2 + b^2$ (por teorema de Pitágoras), así obteniendo $a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + b^2$. Cancelando los terminos cuadráticos por ambos lados obtenemos $2ab \leq 0$. El termino $2ab$ es positivo ya que tanto $a, b \in \mathbb{R}^+$ (ley de signos), también podríamos multiplicar por ambos lados de la desigualdad por los inversos multiplicativos de a y b los cuales son positivos (ya que a y 1 son positivos, necesariamente a^{-1} es positivo, si suponemos que no entonces $aa^{-1} = 1$ pero por ley de signos esto implicaría que 1 es negativo, contradicción), como son positivos la desigualdad se preserva y así llegar a que $2 \leq 0$, ambas son contradicciones inmediatas por lo que nuestra primera suposición es falsa, la cual es que $a + b \leq c$. Por lo que $a + b > c$ en un triángulo rectángulo no degenerado.