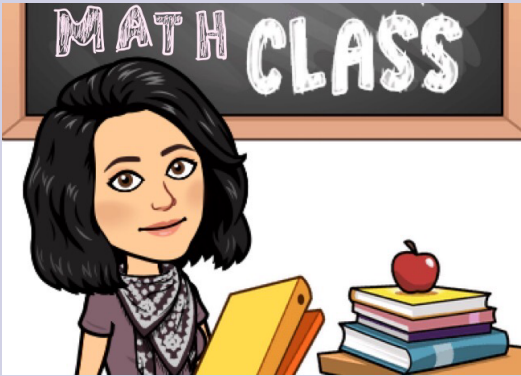
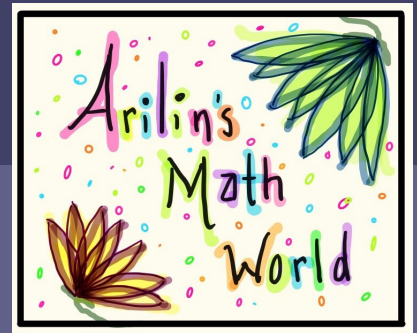


Conjuntos 3



- ~ Probar una contención.
- ~ Probar igualdad de conjuntos.
- ~ Demostraciones por casos.



Demostrar una contención

subconjunto

$$B \subseteq A$$

Cuando quieres demostrar que un conjunto está contenido en otro lo que hay que hacer es ver que cada elemento del conjunto "pequeño" es también un elemento del conjunto "grande".

Esto es fácil cuando tienes conjuntos con pocos elementos y los puedes verificar uno por uno, pero, ¿qué pasa si son conjuntos grandes?

En realidad sigue siendo fácil. Basta con tomar un elemento "arbitrario" del conjunto pequeño y ver que pertenece al conjunto grande.

Ejemplos:

1) Para ver este ejemplo empecemos por definir el conjunto $n\mathbb{Z}$.

Definición: Para $n \in \mathbb{N}$ sea $n\mathbb{Z} = \{n \cdot m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

Ahora sí, el ejemplo.

Demuestra que $6\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}$.

Demostración:

Sea $x \in 6\mathbb{Z}$, entonces $x = 6m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, como $6m = 3(2m)$ se cumple que $x = 3m'$ con $m' = 2m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $x \in 3\mathbb{Z}$.

$$\therefore 6\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}$$

2) Demostrar que el conjunto de números enteros es un subconjunto de los números racionales.

Demostración:

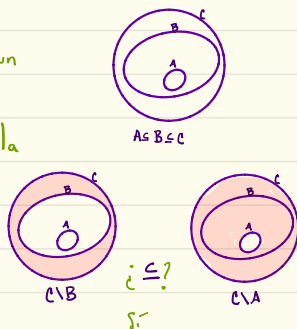
Sea x un número entero, entonces $\frac{x}{1}$ es

un número racional pues x y 1 son ambos enteros.

Como $x = \frac{x}{1}$ se sigue que x es un número racional.

3) Considera los conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B \subseteq C$.
Demostrar que $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Podemos hacer un diagrama de Venn para visualizar la situación.



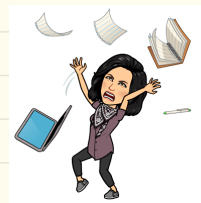
Demostración:

Sea $x \in C \setminus B$, entonces $x \in C$ y $x \notin B$.
Como $A \subseteq B$ y $x \notin B$ se tiene que $x \notin A$.
Por lo tanto $x \in C$ y $x \notin A$, es decir,
 $x \in C \setminus A$.

$\therefore C \setminus B \subseteq C \setminus A$ 

4) Demuestra que $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$.

Demostración:



Imposible

Este enunciado es falso pues $6 = 2(3) \in 2\mathbb{Z}$
pero $6 \notin 4\mathbb{Z}$, pues $6 = 4(1.5)$ y $1.5 \notin \mathbb{Z}$.

Por lo tanto podemos concluir que:

$2\mathbb{Z} \not\subseteq 4\mathbb{Z}$.

Nota 1. Para demostrar que un enunciado es falso basta dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el que el enunciado no se cumple.



Nota 2. El enunciado del ejemplo 4 es falso pero lo que sí se cumple es $4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$

Demostrar igualdad de conjuntos

Aquí tenemos 2 opciones:

- 1) Demostrar "doble contención".
- 2) Que cada paso de la demostración sea un "si sólo si".

- 1) Para probar $A=B$ con la primer opción hay que empezar demostrando $A \subseteq B$ y luego demostrar $B \subseteq A$, o bien $A \supseteq B$.

Contención pa' un lado y contención pa' otro...

- 2) Lo que se requiere para hacer una demostración de "si y sólo si" es justificar cada paso con un "si y sólo si". Esto quiere decir que cada paso es resultado de una definición, o de una equivalencia matemática que ha sido demostrada previamente.

Ejemplo 1.1 (Demostración por doble contención)

Sean A, B y C conjuntos. Entonces $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración

$\subseteq$

Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$. De aquí sabemos que $x \in A$ pero tenemos dos posibles casos: $x \in B$ o $x \in C$.

Caso 1 $x \in B$. Si $x \in B$ entonces $x \in A \cap B$ ^{por lo tanto} ^{ya sabemos que $x \in A$}

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Caso 2 $x \in C$. Si $x \in C$ entonces $x \in A \cap C$ ^{ya sabemos que $x \in A$} y por lo tanto

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Como en cualquier caso $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ concluimos que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\supseteq$

Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Procedamos por casos

Caso 1 $x \in A \cap B$. Si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$. Lo que implica que $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Por tanto $x \in A \cap (B \cup C)$

Caso 2 $x \in A \cap C$. Si $x \in A \cap C$ entonces $x \in A$ y $x \in C$. Lo que implica que $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Por lo tanto $x \in A \cap (B \cup C)$.

Como en cualquier caso $x \in A \cap (B \cup C)$ podemos concluir que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

$\Rightarrow$ Dado que ya probamos ambas contenciones se concluye que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ejemplo 1.2 (Demostración con si sólo si)

Sean A, B y C conjuntos. Entonces $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ y } x \in B \cup C && \text{def de intersección} \\ &\iff x \in A \text{ y } (x \in B \text{ ó } x \in C) && \text{def de unión} \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ ó } (x \in A \text{ y } x \in C) && \text{distributividad de y lo} \\ &\iff x \in (A \cap B) \text{ ó } x \in (A \cap C) && \text{def de intersección} \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && \text{def de unión.} \end{aligned}$$

Nota. Aunque la demostración de "si sólo si" es más corta, únicamente se puede usar cuando puedes justificar cada paso con un si sólo si.



Ejemplo 2 (Demostración por doble contención)

Sean A, B, C conjuntos, entonces $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración.

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Sea $x \in A \cup (B \cap C)$, entonces $x \in A$ ó $x \in B \cap C$. Veamos que pasa en cada caso.

Caso 1 ($x \in A$). Si $x \in A$ entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Caso 2 ($x \in B \cap C$). Si $x \in B \cap C$ entonces $x \in B$ y $x \in C$, lo que implica que $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dado que en ambos casos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ podemos concluir que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Aquí nos conviene distinguir dos posibles casos: $x \in A$ ó $x \notin A$.

Caso 1 $x \in A$. Si $x \in A$ entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.

Caso 2 $x \notin A$. Supongamos que $x \notin A$. Entonces $x \in A \cup B$ implica $x \in B$ y a su vez $x \in A \cup C$ implica $x \in C$. por lo tanto $x \in B \cap C$. De aquí que $x \in A \cup (B \cap C)$.

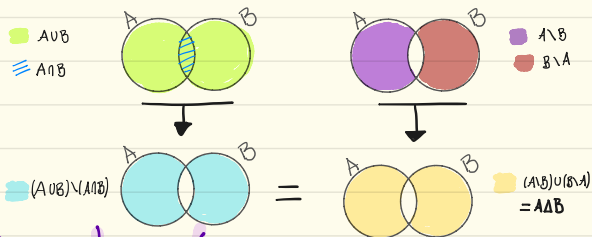
Dado que en ambos casos se cumple $x \in A \cup (B \cap C)$ podemos concluir que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Como ambas contenciones se cumplen $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ejemplo 3 (Demostración por doble contención)

Sean A y B conjuntos. Demuestre que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Otra vez, podemos hacer varios diagramas de Venn para "visualizar" la situación.



Demostración

$\subseteq$ Sea $x \in A \Delta B$, entonces $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Lo cual nos deja con dos posibles casos: $x \in (A \setminus B)$ ó $x \in (B \setminus A)$.

• Caso 1. Si $x \in A \setminus B \rightarrow x \in A$ y $x \notin B$, por lo tanto $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B$, lo que implica $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

• Caso 2. Si $x \in B \setminus A \rightarrow x \in B$ y $x \notin A$, por lo tanto $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B$, lo que implica $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Como en cualquier caso $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ entonces $A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\supseteq$

Sea $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Entonces $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B$. Por lo tanto $x \notin A \cap B$ y $(x \in A \text{ ó } x \in B)$, lo cual nos deja con dos posibles casos:

• Caso 1 $x \notin A \cap B$ y $x \in A$. En este caso $x \in A$ y $x \notin B$. por lo tanto $x \in A \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$.

• Caso 2 $x \notin A \cap B$ y $x \in B$. Aquí tenemos que $x \in B$ y $x \notin A$. por lo tanto $x \in B \setminus A \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$

Como en cualquiera de los casos $x \in A \Delta B$ entonces $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$.

$=$ Como ambas contenciones se cumplen podemos decir que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

□

Cosas que debimos notar



De los ejemplos anteriores podemos notar algunas cosas:

- i) Cuando trabajamos con una "unión" hay que proceder por casos.
Que pasa si el elemento esta en un conjunto y luego ver que pasa si el elemento está en el otro conjunto.
- ii) También podemos proceder por casos cuando no estamos seguros de si un elemento está en cierto conjunto o no.

Reglas para demostrar "por casos"

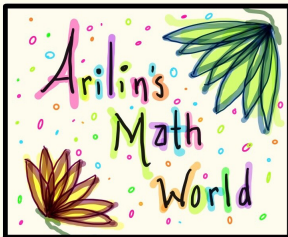


* Se deben considerar, agotar, todos los posibles casos. Por ejemplo si tuviéramos una unión de 5 conjuntos habría que hacer un caso para cada uno de los 5 conjuntos.



* Es necesario que en cada caso se llegue a la conclusión deseada. Si alguno de los casos no funciona la demostración no sirve.

- ✚ Imágenes creadas con Bitmoji
- ✚ Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World



Enero 2020