Familias de Conjuntos

Un conjunto cuyos elementos son conjuntos es llamada una familia de conjuntos.

Por ejemplo:

$$\mathcal{A} = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{3,6\}, \{2,3,6,7,9,10\} \}.$$

Es una familia que consiste de 4 conjuntos.

Otro ejemplo es:

$$\mathcal{B} = \{ (-x,x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0 \}$$

es una familia de intervalos abiertos.

__Definición__: Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. La __unión__ de $\mathcal{A}$ es

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{ x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A} \}.$$

En símbolos:

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \iff (\exists A \in \mathcal{A})(x \in A).$$

Para mostrar que un elemento está en la unión de una familia, tenemos que mostrar la existencia de un elemento en la familia que contiene dicho elemento.

__Ejemplo__: Para $\mathcal{A}$ como arriba tenemos:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10\}.$$

y para $\mathcal{B}$ arriba tenemos:

$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}$ porque todo real es un elemento en algún intervalo abierto, por ejemplo

$$b \in (-|b|-1, |b|+1).$$

__Definition__. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos, la intersección de $\mathcal{A}$ es

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{ x : x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \}.$$

En símbolos:

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \iff (\forall A \in \mathcal{A})(x \in A).$$

__Ejemplo__: Para la familia $\mathcal{A}$ de arriba tenemos

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{3\}.$$

Para $\mathcal{B}$ de arriba tenemos

$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{0\}$ porque 0 es el único número en todos los intervalos $(-x,x)$.

Teorema 2.3.1. Para todo conjunto B en una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos,

a) $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq B$

b) $B \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$

c) Si $\mathcal{A}$ no es vacío, entonces

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Dem:

a) Sean $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos y $B\in\mathcal{A}$. Suponga $x\in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$. Entonces $x\in A$ para todo $A\in \mathcal{A}$. En particular $x\in B$. Por lo tanto

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq B.$$

b) Ejercicio.

c) Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía. Escojamos cualquier $C\in\mathcal{A}$. Por a) y b) tenemos

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq C \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$ Por lo tanto

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \quad \blacksquare$$

Ejemplo: Sea $\mathcal{B}$ la familia $\{B_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, donde $B_n=\{0,1,2,\dots,n\}$.

Por ejemplo $B_1=\{0,1\}$, $B_2=\{0,1,2\}$, etc.

Entonces $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B=\{0,1\}$ y

$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B=\mathbb{N}\cup\{0\}$. $\blacksquare$

Definición: Sea Δ un conjunto no vacío tal que para cada $\alpha\in\Delta$ tenemos un conjunto A_α. La familia $\{A_\alpha : \alpha\in\Delta\}$ es una familia indexada. El conjunto Δ se le llama conjunto de índices y cada $\alpha\in\Delta$ es un índice. $\blacksquare$

Ejemplo: Para todo $n\in\mathbb{N}$, sea $A_n=\{n,n+1,2n\}$. Entonces $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{2,3,4\}$, $A_3=\{3,4,6\}$, et. El conjunto con índice 10 es $A_{10}=\{10,11,20\}$. Excepto por A_1, todo conjunto en la familia $\{A_i : i\in\mathbb{N}\}$ tiene 3 elementos.

En realidad no hay diferencia entre una familia de conjuntos y una familia indexada. Toda familia de conjuntos se puede indexar encontrando un conjunto de índices suficientemente grande para indexar cada elemento de la familia.

Ejemplo: Para $A_1=\{1,2,4,5\}$, $A_2=\{2,3,5,6\}$ y $A_3=\{3,4,5,6\}$ el conjunto de índices es $\Delta=\{1,2,3\}$. La familia $\mathcal{A}$ indexada por Δ es $\mathcal{A}=\{A_i : i\in\Delta\}$.

Podemos cambiar los índices. Por ejemplo $\Gamma=\{10,21,\pi\}$, $A_{10}=\{1,2,4,5\}$, $A_{21}=\{2,3,5,6\}$ $A_\pi=\{3,4,5,6\}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\{A_i : i\in\Delta\}\\ &=\{A_i : i\in\Gamma\}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Para una familia $\mathcal{A}=\{A_\alpha : \alpha\in\Delta\}$, la notación para unión e intersección es

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A \quad \text{y} \quad x\in\bigcup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha \text{ iff } (\exists\alpha\in\Delta)(x\in A_\alpha)$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Delta}A_\alpha=\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A \quad \text{y} \quad x\in\bigcap_{\alpha\in\Delta}A_\alpha \text{ iff } (\forall\alpha\in\Delta)(x\in A_\alpha)$$

Ejemplo: Para $n\in\mathbb{N}$, sea $A_n=\{n,n+1,2n\}$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\mathbb{N}$. Para mostrar, por ejemplo, que 27 está en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ debemos exhibir un índice n tal que $27\in A_n$. Por ejemplo $27\in A_{27}$.

Como no hay un número x tal que $x\in A_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, tenemos

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\emptyset.\ \blacksquare$$

Para una familia indexada con conjunto de índices $\mathbb{N}$ escribimos $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ en lugar de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ en vez de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

Ejemplo: Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $A_n=\{n,n+1,n^2\}$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\emptyset \qquad \bigcup_{i=4}^{6}A_i=\{4,5,6,7,16,25,36\}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\mathbb{N} \qquad \bigcap_{i=2}^{4}A_i=\{4\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,4,9\} \qquad \bigcap_{i=8}^{10}A_i=\emptyset.\ \blacksquare$$

Teo. Sea $\mathcal{A}=\{A_\alpha : \alpha\in\Delta\}$ una familia indexada de conjuntos. Entonces

a) $\bigcap_{\alpha\in\Delta}A_\alpha\subseteq A_\beta$ para cada $\beta\in\Delta$.

b) $A_\beta\subseteq\bigcup A_\alpha$ para cada $\beta\in\Delta$

c) $\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha^c$

d) $\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha^c$

$\Bigg\}$ Leyes de De Morgan

<u>Dem</u>: a) y b) son ejercicios

c) $x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^c \iff x \notin \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha.$

$\iff \sim (\forall \alpha\in\Delta)(x \in A_\alpha)$

$\iff (\exists \alpha\in\Delta)(x \notin A_\alpha)$

$\iff (\exists \alpha\in\Delta)(x \in A_\alpha^c)$

$\iff x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha^c.$

d) Ejercicio. $\blacksquare$