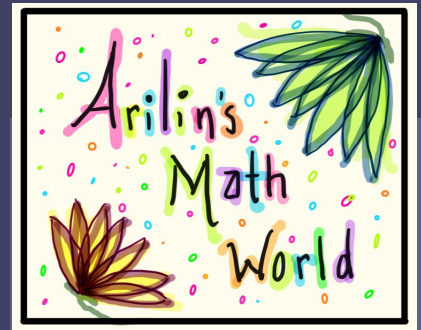


Relaciones de equivalencia, clases de equivalencia y particiones

Definiciones, Ejemplo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Ejemplo pastel, Ejemplo palabras

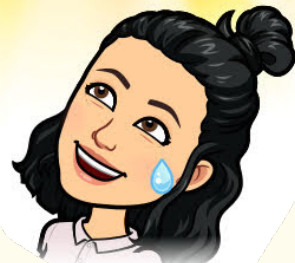


♥ Las definiciones ♥

Decimos que una relación $R \subseteq A \times A$ es de equivalencia si y solo si cumple las siguientes 3 condiciones.

- a) Para toda $a \in A$, $(a, a) \in R$
- b) $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$
- c) $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implican $(a, c) \in R$

Divine



Definición: Sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Sea $a \in A$. Definimos su clase de equivalencia como:

$$[a] = \{ b \in A \mid (a, b) \in R \}$$

Todos los elementos de A con los que a se relaciona

Definición: Una partición P de un conjunto A es una familia de subconjuntos $A_i \subseteq A$ tales que:

- 1) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$
- 2) $\bigcup_{A_i \in P} A_i = A.$

Ejemplo →
↓

Ejemplo

Considere la siguiente relación entre elementos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Diremos que $(a,b) R (c,d)$ si y sólo si $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

tal que $a=rc$ y $b=rd$.

Demstrar que R es de equivalencia

Dem. Para ver que es de equivalencia hay que verificar

- 1) Reflexión
- 2) Simetría
- 3) Transitividad.

1) Reflexiva $(a,b) R (a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, notemos que $a=1(a)$ y $b=1(b)$
por lo tanto $(a,b) R (a,b)$ $\left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \right)$

2) Simétrica $((a,b) R (c,d) \rightarrow (c,d) R (a,b))$

Sean $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(a,b) R (c,d)$. Entonces

$\exists r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $a=rc$ y $b=rd$. Como $r \neq 0 \rightarrow$

$\frac{1}{r} \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{r} \neq 0$. Notemos que $a=rc$ y $b=rd$ implican
que $c=(\frac{1}{r})a$ y $d=(\frac{1}{r})b$ por lo tanto $(c,d) R (a,b)$. $\left(\frac{rc}{1}, \frac{rd}{1} \right)$

3) Transitiva $((a,b) R (c,d) \text{ y } (c,d) R (e,f) \rightarrow (a,b) R (e,f))$

Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(a,b) R (c,d)$ y

$(c,d) R (e,f)$. Entonces $\exists r,s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$a=rc$, $b=rd$, $c=se$ y $d=st$. Entonces

$a=rc=r(se)=(rs)e$ y $b=rd=r(st)=(rs)t$, luego, como
 $r,s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow rs \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por lo tanto $(a,b) R (e,f)$. $\left(\frac{a}{rs}, \frac{b}{rs} \right)$

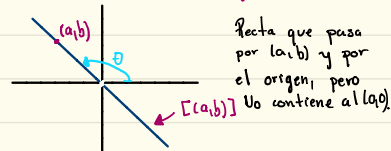
Clases de equivalencia

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, su clase de equivalencia es:

$$[(a,b)] = \{ (c,d) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) R (c,d) \}$$

$$= \{ (c,d) \in \mathbb{R}^2 \mid a=rc \text{ y } b=rd \text{ para algún } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

$$= \{ (sa, sb) \mid s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \} \quad s = \frac{1}{r}$$



Recta que pasa por (a,b) y por el origen, pero no contiene al $(a,0)$

Partición

Consideremos el conjunto L_θ

como la recta de inclinación θ que pasa por el origen pero no contiene al origen.

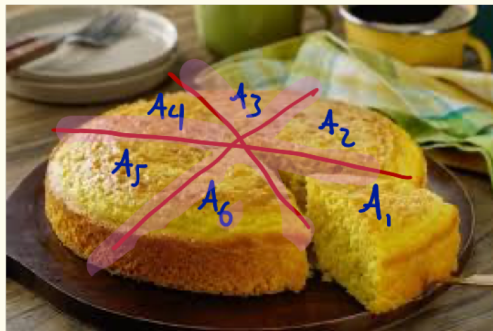
Sea P el conjunto cuyos elementos son los L_θ tales que $\theta \in [0, 180)$.

P es una partición de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

- El único punto donde L_i y L_j con $i \neq j$ pudieran intersectarse es el origen pero $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ así que no hay problema.
- Para cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ hay un L_θ que lo contiene.



$A = \text{Pastel} = \text{migajas partículas de pastel}$



Partición

- Las rebanadas no se intersectan

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j$$

- Si juntamos las rebanadas tenemos el pastel completo.

$$U A_i = A.$$

$$P = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$



Clases de equivalencia

Cada rebanada es una clase de equivalencia.

Sea x una migaja del pastel

$$[x] = \{y \text{ migaja} \mid x R y\}$$

= migajas en la misma rebanada
= la rebanada

La clase de equivalencia de una migaja x son todas las migajas que pertenezcan a la misma rebanada

Relación

Diremos que $(x, y) \in R$ si x y y pertenecen a la misma rebanada

R es de equivalencia

* cada migaja x está en la misma rebanada que si misma $x R x$

* Si una migaja x está en la misma rebanada que otra migaja y . Entonces esa otra migaja está en la misma rebanada que x .
 $x R y \rightarrow y R x$

* Si las migajas x, y están en la misma rebanada y la migaja y está en la misma rebanada que la migaja z entonces, las migajas x y z están en la misma rebanada
 $x R y \text{ y } y R z \rightarrow x R z$

Ejemplo:

Sea A el conjunto de palabras en español. Definamos $R \subseteq A \times A$ de manera que relacione dos palabras cuando ambas empiezen con la misma letra.
Demostrar que R es de equivalencia.

agua $\in A$
si $\in A$
no $\in A$
cara $\in A$.



(mano, mesa) $\in R$, (agua, aloe) $\in R$, (león, tigre) $\notin R$

Clases de Equivalencia

$[beso] = \{ \text{Palabras en español que empiezan con b} \}$
 $[Wini] = \{ \text{Palabras en español que empiezan con w} \}$

Hay una clase de equivalencia para cada letra del abecedario



Dem.

1) Sea x una palabra en A .

Es claro que x empieza con la misma letra que sí misma

$\therefore (x, x) \in R$

2) Supongamos que $(x, y) \in R$, entonces la palabra x empieza con la misma letra que la palabra y ; así que, y empieza con la misma letra que x y por lo tanto $(y, x) \in R$

3) Sean $x, y, z \in A$ palabras tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$. Por lo tanto x empieza con la misma letra que y y y empieza con la misma letra que z . Por lo tanto x empieza con la misma letra que z . Lo que quiere decir que $(x, z) \in R$.

Partición

$P = \{ [agua], [beso], [casa], \dots, [yeso], [zapote] \}$

Un conjunto $A_i \in P$ es de la forma

$A_1 = \{ \text{Palabras que empiezan con a} \}$
 $\vdots$
 $A_{23} = \{ \text{Palabras que empiezan con a} \}$

para algún i .

+ Imágenes creadas con Bitmoji.

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

+ Recuerda visitar:
* mi canal Arilin's Math y
* mi grupo de Facebook
Arlin's Math World.

