

Conjuntos Infinitos

Una forma de verificar que el conjunto A es infinito podemos usar el siguiente resultado:

"Si A es equivalente a uno de sus subconjuntos propios, entonces A es infinito".

Teorema 5.2.1. El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

Proof. Sea B el conjunto $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$. Entonces $B \subsetneq \mathbb{N}$ y $f: \mathbb{N} \rightarrow B$ dada por $f(n) = n+1$ es una biyección. Así que por el resultado de arriba, $\mathbb{N}$ es infinito. $\square$

Definición. Sea S un conjunto. S es infinito numerable si y sólo si $S \approx \mathbb{N}$.

Abreviamos infinito numerable como ω -numerable.

Ejemplos: 1) Como $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, entonces $\overline{\mathbb{N}} = \aleph_0$.

2) Demostramos anteriormente que el conj. E^+ de enteros positivos pares es equivalente a $\mathbb{N}$. Por lo tanto E^+ es ω -numerable. Aún cuando nuestra intuición podría decirnos que sólo la mitad de los números naturales son pares, no es correcto decir que $\mathbb{N}$ tiene el doble de elementos que E^+ , o incluso decir que $\mathbb{N}$ tiene más elementos que E^+ .

Teorema 5.2.2. El conjunto $\mathbb{Z}$ es ω -numerable.

Dem. La función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{1-x}{2} & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=-1$, $f(4)=2$, $f(5)=-2$, $f(6)=3$, $f(7)=-3$, y así...

i) f es iny. Suponga $f(x)=f(y)$ para algún $x, y \in \mathbb{N}$. Primero veamos que si x o y es par y el otro es impar, entonces sólo uno de $f(x)$ y $f(y)$ es positivo, así que $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto, x e y tiene la misma paridad. Si x e y son ambos pares, $f(x)=f(y)$ implica $\frac{x}{2} = \frac{y}{2}$, y por lo tanto, $x=y$. Si x e y son ambos impares, ent. $\frac{1-x}{2} = \frac{1-y}{2}$, y de nuevo $x=y$.

ii) f es supra. Suponga $w \in \mathbb{Z}$. Si $w > 0$, ent. $2w$ es par y $f(2w) = \frac{2w}{2} = w$. Si $w \leq 0$, ent. $1-2w$ es un natural impar y $f(1-2w) = \frac{1-(1-2w)}{2} = w$. En ambos casos $w \in \text{Rng}(f)$. Luego f es supra.

Por lo tanto $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$. $\square$

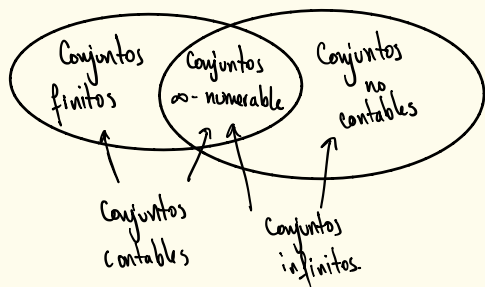
Teorema 5.2.3 a) El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es ω -numerable.

b) Si A y B son ω -numerable, ent. $A \times B$ es ω -numerable.

Dem: a) La función $F(n, m) = 2^{m-1} (2n-1)$ es una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$.

b) Como $|A| = |\mathbb{N}|$ y $|B| = |\mathbb{N}|$, $|A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ por Teo 5.1.2 (a). Por a) $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Por lo tanto $|A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. $\square$

Definición: Un conj. S es contable $\Leftrightarrow S$ es finito o ω -numerable. S es no contable $\Leftrightarrow$ no es contable. $\square$



En su forma decimal, cualquier número real en $(0, 1)$ se puede escribir como $0.a_1a_2a_3a_4\dots$ donde cada a_i es un entero entre 0 y 9. En esta forma $\frac{7}{12} = 0.58333\dots$ que se puede abreviar como $0.58\bar{3}$. El número $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ se dice que es en forma normalizada ssi no existe k tal que para todo $n > k$, $a_n = 9$.

Por ejemplo $0.\overline{8142}$ y $\frac{2}{5} = 0.4\bar{0}$ están en forma normalizada, pero $0.4\bar{9}$ no lo está. Todo número real se puede expresar de manera única en forma normalizada.

Ambos $0.4\bar{9}$ y $0.5\bar{0}$ representan el mismo número real $\frac{1}{2}$, pero sólo $0.5\bar{0}$ está normalizado.

Dos números reales en forma normalizada son iguales si y sólo si tienen dígitos idénticos en cada posición decimal.

Teorema 5.2.4. El intervalo $(0, 1)$ es no contable.

Dem: El intervalo $(0, 1)$ incluye el conjunto $A = \{\frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}\}$ que es infinito dado que $f: A \rightarrow A$, dada por $f(\frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2^{k+1}}$ es una biyección entre A y $\text{Rng}(f) \subset A$.

Entonces por Teo 5.1.6 $(0, 1)$ es infinito.

Vamos a mostrar que $(0, 1)$ no es ω -numerable por contradicción. Suponga que $(0, 1)$ es ω -numerable. Entonces hay una biyección $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$.

Vamos a mostrar que f no es sup-ra, que es una contradicción.

Escribamos los elementos de la imagen de f en forma normalizada:

$$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$$

$$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots$$

$$f(3) = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots$$

$\vdots$

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\dots$$

$\vdots$

Sea b el número $b = b_1b_2b_3b_4\dots$

donde

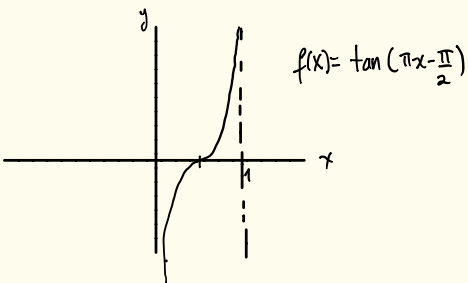
$$b_i = \begin{cases} 5 & \text{si } a_{ii} \neq 5 \\ 3 & \text{si } a_{ii} = 5 \end{cases}$$

Entonces $b \in (0,1)$ por construcción. Sin embargo para cada n , b difiere de $f(n)$ es el n -ésimo decimal. Así que $b \neq f(n) \forall n \in \mathbb{N}$, lo que significa que $b \notin \text{Rng}(f)$. Por lo tanto f no es supra.

Así que $(0,1)$ no es ω -numerable. $\square$

Teorema 5.2.5 El conjunto $\mathbb{R}$ no es contable.

Dem: Definimos $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. Podemos ver que f es una biyección con su gráfica:



Como $(0,1)$ no es contable, entonces $\mathbb{R}$ no es contable. $\square$