Teorema del Binomio

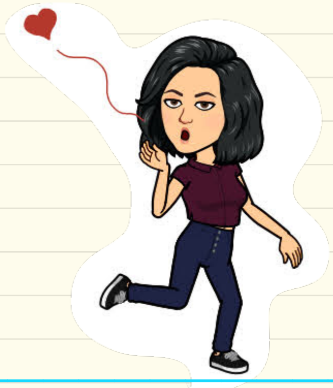
$\binom{n}{k}$

$(x+y)^n$

Teorema del binomio

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$



Ejemplo. Para $n=2$ tenemos:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = \binom{2}{0} x^{2-0} y^0 + \binom{2}{1} x^{2-1} y^1 + \binom{2}{2} x^{2-2} y^2$$

$$= 1(x^2)(y^0) + 2(x^1)(y^1) + 1(x^0)(y^2)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2!}{(1)(2!)} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2!}{(1!)(1!)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2!}{(2!)(0!)} = 1$$

Fórmula $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Binomio cuadrado perfecto

Sobre el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$

Teorema: Sean n y k enteros no negativos. Entonces

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Simetría)

2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ para $n>0$ y $0<k<n$

Dem.

1) $$\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{Escoger } n-k \text{ elementos}} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Escoger } k \text{ elementos}}$$

Si escoges $n-k$ elementos, te sobran k elementos

Si escoges k elementos, te sobran $n-k$ elementos

Cada forma de elegir k elementos también define una forma de elegir $n-k$ elementos, y viceversa.

2) $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

La única manera de elegir 0 elementos es no agarrar nada.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

La única manera de elegir n elementos es agarrarlos todos.

Dem 3) siguiente página

3) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

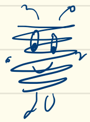
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{k+n-k}{(n-k)(k)}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)(k)}\right)$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}$$



Triángulo de Pascal.

Contiene a $\binom{n}{k}$ en la posición k del renglón n

renglón

0 — $1 = \binom{0}{0}$

1 — $k=0$: $1 = \binom{1}{0}$, $k=1$: $1 = \binom{1}{1}$ — $1+1=2$

2 — $k=0$: $1 = \binom{2}{0}$, $k=1$: $2 = \binom{2}{1}$, $k=2$: $1 = \binom{2}{2}$ — $2+1=3$

3 — $k=0$: $1 = \binom{3}{0}$, $k=1$: $3 = \binom{3}{1}$, $k=2$: $3 = \binom{3}{2}$, $k=3$: $1 = \binom{3}{3}$ — $3+3=6$

4 — $k=0$: $1 = \binom{4}{0}$, $k=1$: $4 = \binom{4}{1}$, $k=2$: $6 = \binom{4}{2}$, $k=3$: $4 = \binom{4}{3}$, $k=4$: $1 = \binom{4}{4}$ — $6+4=10$, $4+1=5$

5 — $k=0$: $1 = \binom{5}{0}$, $k=1$: $5 = \binom{5}{1}$, $k=2$: $10 = \binom{5}{2}$, $k=3$: $10 = \binom{5}{3}$, $k=4$: $5 = \binom{5}{4}$, $k=5$: $1 = \binom{5}{5}$

⋮

teorema del binomio

Coeficientes de

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x+y$

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

⋮

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

$\binom{n}{1} = n$

Simetría

1)

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Ejercicios.

1) Dar una fórmula para expandir $(x+y)^7$

2) Calcula el coeficiente de a^2b^{58} en $(a+b)^{60}$

3) Sabiendo que en la expanción de $(2x+b)^{18}$ el coeficiente de x^{15} es $2^{20}b^2$.
Calcula cual es el valor de b.

4) *Use el teorema del binomio para demostrar que*

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Intenta resolver los ejercicios y luego compara tus respuestas con mis soluciones.

Las soluciones están en las siguientes páginas.

Ejercicio 1

Dar una fórmula para expandir $(x+y)^7$

Solución

Voy a buscar los coeficientes de $(x+y)^7$ en el renglón 7 del triángulo de pascal pues los números en el renglón n son los coeficientes de $(x+y)^n$

Como $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ para calcular un número en el triángulo de Pascal sólo hay que sumar los dos números de arriba

1 6 15 20 15 6 1 ← Renglón 6

1 7 21 35 35 21 7 1 ← Renglón 7

De aquí que

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

Ejercicio 2

Calcula el coeficiente de a^2b^{58} en $(a+b)^{60}$

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Solución

Del teorema del binomio tengo que

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{60} \binom{60}{k} a^{60-k} b^k$$

notemos que para obtener a^2b^{58} es necesario tener $k=58$.

Por lo tanto el coeficiente de a^2b^{58} es $\binom{60}{58}$

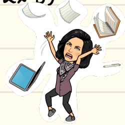
$$\binom{60}{58} = \frac{60!}{58!\,(60-58)!} = \frac{60!}{(58!)(2!)} = \frac{60\times 59 \times \cancel{58\times 57 \times \cdots \times 2\times 1}}{(\cancel{58\times 57\times \cdots \times 2\times 1})(2\times 1)} = \frac{\overset{30}{\cancel{60}}\times 59}{\cancel{2}} = 30\times 59 = 1770$$

El coeficiente de a^2b^{58} en $(a+b)^{60}$ es 1770.

Ejercicio. 3

Sabiendo que en la expanción de $(2x+b)^{18}$ el coeficiente de x^{15} es $2^{20}b^2$ calcula cual es el valor de b.

Para saber que forma tiene el coeficiente de x^{15} en $(2x+b)^{18}$ tengo 2 opciones:

1) multiplicar $(2x+b)$ por sí mismo 18 veces  ó
2) ultilizar el teorema del binomio. 

Según el teorema del binomio $(2x+b)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (2x)^{18-k} (b)^k$

notemos que para que el exponente de x sea 15 necesitamos $k=3$.

Entonces vamos a ver qué forma tiene el término con x^{15}, es decir, cuando $k=3$

Si $k=3$ → $\binom{18}{k}(2x)^{18-k} b^k = \binom{18}{3}(2x)^{15} b^3 = (2^4\cdot 3\cdot 17)(2^{15})\, x^{15} b^3 = (2^{19}\cdot 3\cdot 17) b^3\, x^{15}$

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3!\,(18-3)!} = \frac{18!}{3!(15!)} = \frac{18\times 17\times 16\times \cancel{15\times 14\times\cdots\times 2\times 1}}{(3\times 2\times 1)\,\cancel{(15\times 14\times\cdots\times 2\times 1)}} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}\times 17\times 16}{\cancel{6}} = 3\times 17\times 16 = 2^4\times 3\times 17$$

El coeficiente de x^{15} es $2^{19}\cdot 3\cdot 17\cdot b^3$. Por otro lado, sabemos que el coeficiente de x^{15} también es $2^{20}b^2$ entonces

$2^{19}\cdot 3\cdot 17\cdot b^3 = 2^{20} b^2$ dividir entre 2^{19}

$3\cdot 17\cdot b^3 = 2\, b^2$ dividir entre b^2

$3\cdot 17\; b = 2$

$$b = \frac{2}{3(17)}$$

Ejercicio. 4

Use el teorema del binomio para demostrar que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Siguiendo la sugerencia voy a escribir el teorema del binomio para ver si se me ocurre cómo solucionar el problema.

Esto ya se parece bastante a lo que quiero demostrar lo que voy a hacer entonces será considerar valores convenientes para “x” y para “y”.

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Dem.

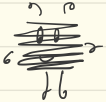
Consideremos $x=1$ y $y=-1$

y apliquemos el teorema del binomio. Entonces

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Ahora notemos que $\quad (1+(-1))^n = (1-1)^n = 0^n = 0.$

Por lo tanto $\quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$



∎

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
    * mi canal Arilin's Math y
    * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.