

Lista de Ejercicios: Inducción Matemática y Combinatoria

Unidad 4. Álgebra Superior 1

Profesores: Arilín Haro y Luis Jorge Sánchez Saldaña.
Selección de ejercicios hecha por Brenda Navarro.

A continuación encontrarán una lista de ejercicios sugeridos para que practiquen el contenido de esta unidad. Como verán, están separados por temas para que los vayan resolviendo de acuerdo al avance con las notas y los vídeos.

Inducción Matemática y Combinatoria

Números naturales e inducción matemática

Ejercicio 1. Sean $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ tales que $m + n = r + s$. Demuestra que $m < r$ si y sólo si $s < n$.

Ejercicio 2. Sean $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. Demuestra que si $m = n + r$ y $n = m + s$, entonces $r = 0$ y $s = 0$.

Ejercicio 3. Demuestra por inducción que para cada número natural $n \geq 1$,

$$1 + 2^n \leq 3^n.$$

Ejercicio 4. Demuestra por inducción, que para cada $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ es divisible por 3.

Ejercicio 5. Demuestra por inducción que para cada número natural $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Ordenaciones con repetición, Ordenaciones, Permutaciones y Combinaciones

Ejercicio 6. *Entre A y B hay 4 líneas de autobuses y entre B y C hay 3 líneas de autobuses. Encuentra el número n de formas en que una persona puede viajar en autobús:*

- i) De A a C pasando por B;*
- ii) En viaje redondo de A a C pasando por B;*
- iii) En viaje redondo de A a C pasando por B, pero sin usar una línea de autobús más de una vez.*

Ejercicio 7. *Considerando que las placas de los coches constan de tres números y tres letras. ¿Cuántos números de placa se pueden hacer con estas condiciones?.*

Ejercicio 8. *Un vacacionista quiere seleccionar 3 libros de 19 que le recomendaron para leer en la playa. 11 son libros de ficción.*

- i) ¿Cuántas selecciones posibles hay?.*
- ii) ¿Cuántas de esas selecciones tienen exactamente 2 de los 11 libros de ciencia ficción?.*
- iii) ¿Cuántas de esas selecciones tienen exactamente 1 libro de ciencia ficción?.*

Ejercicio 9. *En un lugar donde venden hamburguesas se advierte al cliente que su hamburguesa puede ir con todo lo siguiente o sin ello: salsa de tomate, mostaza, mayonesa, lechuga, tomate, cebolla, pepinillos, queso o piña. ¿Cuántos tipos diferentes de hamburguesas son posibles?.*

Ejercicio 10. *Encuentra el número de contraseñas de tamaño 7, que tienen cada uno de los dígitos 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 exactamente una vez.*

- i) ¿Cuántas de estas contraseñas tienen los primeros tres dígitos pares?.*
- ii) ¿Cuántas de estas contraseñas tienen tres dígitos pares consecutivos?.*
- iii) ¿Cuántas de estas contraseñas tienen los cuatro dígitos impares consecutivos?.*
- iv) ¿Cuántas de estas contraseñas no tienen dos dígitos impares consecutivos?.*

Teorema de Binomio y Triángulo de Pascal

Ejercicio 11. Utiliza el teorema del binomio y el triángulo de Pascal para desarrollar la expresión:

i) $(a + b)^6$.

ii) $(a - 2b)^4$.

iii) $(a + 2b - \frac{c}{2})^4$.

Ejercicio 12. El segundo, tercer y cuarto término en el desarrollo $(x + y)^n$ son: 240, 720 y 1080 respectivamente. Encuentra los valores de x , y y n .

Ejercicio 13. Encuentra el coeficiente de a^3b^{10} en la expansión de $(a + b)^{13}$.

Ejercicio 14. Encuentra el coeficiente de a^2b^{10} en la expansión de $(a + 2b)^{12}$.

Ejercicio 15. En el desarrollo de $(1 + \frac{x}{a})^n$ los tres primeros términos son $1 + 30x + 360x^2$. Encuentra los valores de a y n .