Álgebra Superior I

Sistemas de ecuaciones lineales, sus soluciones y su matriz de coeficientes.

Introducción a sistema de ecuaciones

Definición:

Una ec. Lineal en n-variables es una ecuación que se puede escribir de la forma:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

Aquí

$\boldsymbol{a_2, a_2, \ldots, a_n}$ **son** *llamados coeficientes y* $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ son llamadas variables.

B es una constante (o escalar y se le llama término independiente.

Una solución al ec. Es una sucesión:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

de numero tales que si sustituimos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_n = s_n$ se satisface la ecuación.

Ejemplo:

1. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$ *sí es una ec. lineal.*
2. $x_1^{1/2} + 3x_2 = 0$ *no es lineal porque* x_1 *tiene un exponente* $1/2 \neq 1$
3. $2x_1^{-1} + sinx_2 = 2$ no es una ecuación lineal porque x_1 tiene exponente -1(otra razón es que aparece una función seno.

Sistemas lineales.

Objetivo: Obtener soluciones simultaneas a varias (o una) ecuaciones lineales.

Definición:

Un sistema *(mxn)* de ec. Lineales es un conjunto de ec. De la forma. $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 & & \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 & & \\
\cdot & & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & & m\ ec.'s \\
\cdot & & \cdot & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m & & \\
& n - variables & & &
\end{array}$$

Una solución al sistema es una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que son solución de todas las ecuaciones simultáneamente.

Warning!: Cuidado con los índices

$\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{i}$ — $\boldsymbol{i-}$***ésima renglón o*** $\boldsymbol{i-}$***ésima ec.***

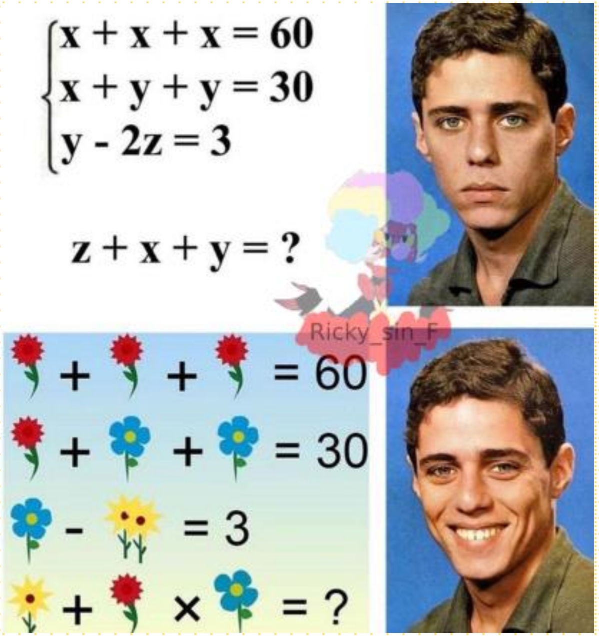
$\boldsymbol{j}$ — $\boldsymbol{j-}$***ésima columna o*** $\boldsymbol{j-}$***ésima incógnita.***

Ejemplos de sistemas lineales:

a) $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{matrix}$ *Es un* $(2x2)$ *sistema*

b) $\begin{matrix} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -11 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 15 \end{matrix}$ *es un sitema* $(2x3)$

c) $\begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 6 \end{matrix}$ $(2x2)$*sistema*



Ejemplo:

En el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{matrix}$$

Tenemos: $\begin{matrix} a_{11} = 2, & a_{12} = -1, & a_{13} = -3 \\ a_{21} = -2, & a_{22} = 2, & a_{23} = 5 \end{matrix}$

$$b_1 = -1, \quad b_2 = 3$$

Y una solución esta dada por:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1:$$

$$\begin{matrix} 2(1) - (0) - 3(1) = -1 \\ -2(1) + 2(0) + 5(1) = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{matrix}$$

Geometría de las soluciones

Considere el sistema

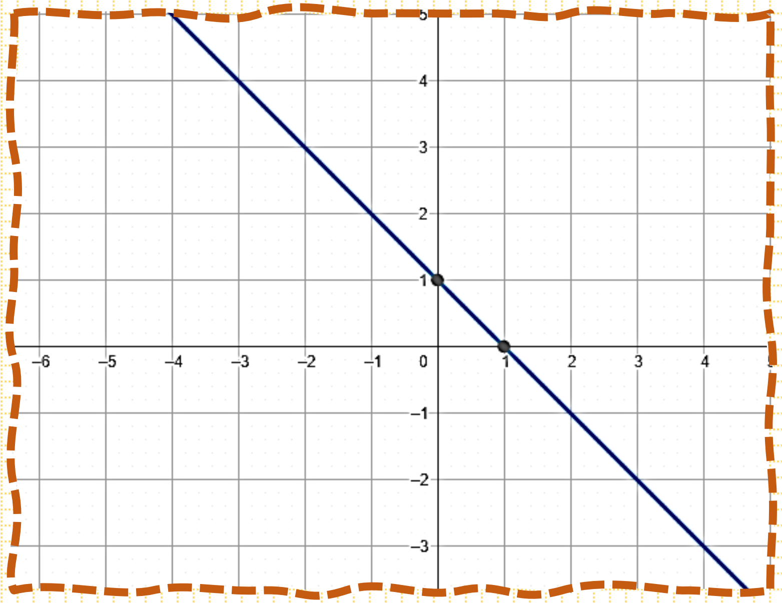
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

con al menos un coeficiente no nulo en cada renglón

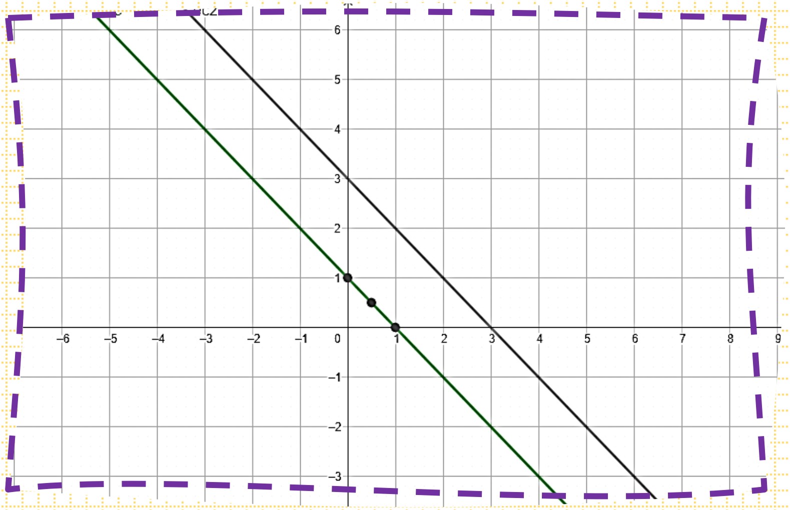
Entonces cada ecuación representa una línea en el plano

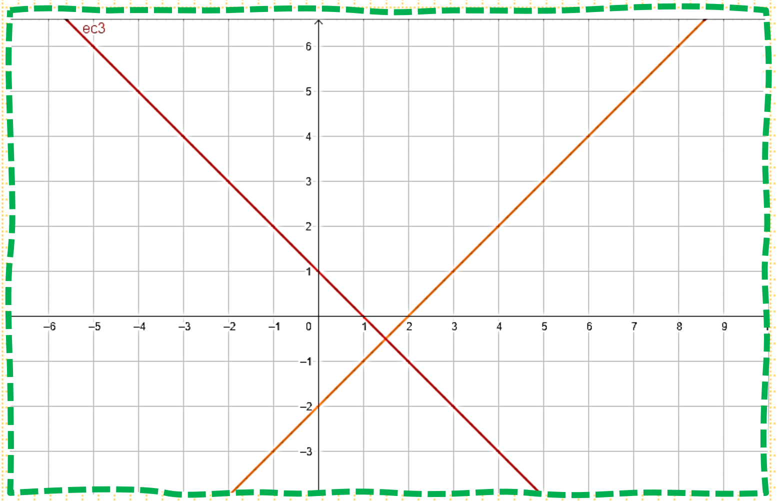
Tenemos las siguiente situaciones:

Ambas líneas son iguales
x+1=1
2x+2y=2
Así que tenemos infinitas soluciones



Las líneas son paralelas. Así que tenemos cero soluciones
0x+y=1
0x+y=0





Las dos líneas se intersecan en un punto único. Así que tenemos una única solución.

M A T R I C E S

Una matriz ***(nxm)*** es un arreglo rectangular de la forma:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & + \cdots + & a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} & + \cdots + & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} + a_{m2} & + \cdots + & a_{mn} \end{bmatrix} & \boldsymbol{m - renglones} \\ \boldsymbol{n - columnas} & \end{array}$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

Asociamos de ***(mxn)***

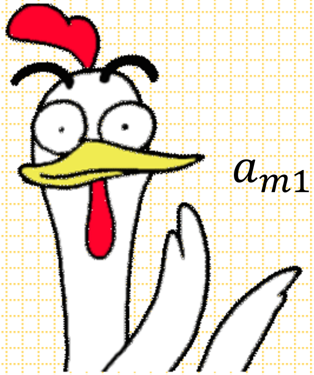
$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Su matriz coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & + \cdots + & a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} & + \cdots + & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} + a_{m2} & + \cdots + & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definición la matriz aumentada del sistema

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$



$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} + a_{12} & + \cdots + & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} + a_{22} & + \cdots + & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + a_{m2} & + \cdots + & a_{mn} & b_m \end{array}\right] & b \\ A & \end{array}$$

Operaciones elementales:

Definición:
Dos sistemas de ecuaciones lineales en n variables son equivalentes si tiene el mismo conjunto de soluciones

Teorema 1. Si una de la siguiente operaciones es apilada aun sistema de ecuaciones lineales, entonces el sistema de ecuaciones resultantes es equivalente al sistema original:

1. Intercambiar do ecuaciones
2. Multiplicar una ec. Por un escalar no cero
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación

Notación:

$$\boldsymbol{E_i \leftrightarrow E_j}\ Ec.i - \textit{ésima son intercambiadas}$$

$$\boldsymbol{kE_i}\ La\ i - \textit{ésima ec. es miltiplicada por } k$$

$$\boldsymbol{E_i + kE_j}\quad k \textit{ veces la}$$

$$\text{j}-\textit{esima ecuacion es sumada a la}$$

$$i - \textit{ésima ecuacion}$$

Ejemplo: Use operaciones elementales para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Sol. Aplicamos $E_2 + E_1$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Aplicamos $\frac{1}{3}E_2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Aplicamos $E_1 - E_2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad &= 5 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Por el Teo 1. este sistema es equivalente al sistema original, por lo tanto

$$\boldsymbol{x_1 = 5 \text{ y } x_2 = 3}$$

es la única solucion a nuestro sistema original

operaciones renglón

Definición: Las siguientes operaciones realizadas en los renglones de una matriz se llaman operaciones renglón elementales:

1. Intercambiar dos renglones
2. Multiplicar un renglón por un escalar no cero
3. Sumar un múltiplo de un renglón un múltiplo de otro

Notación:

- $R_i \Longleftrightarrow R_j$ $El\ renglon\ i-ésimo\ y\ el\ j-ésimo\ son\ intercambiados$
- kR_i $El\ i-ésimo\ renglon\ es\ multiplicado\ por\ k$
- R_i+kR_j $k\ veces\ el\ j-éximo\ es\ sumado\ al\ i-ésimo\ renglon$

Definición

Dos matrices ***(nxm)*** son renglón equivalentes si un se obtiene de la otra mediante una sucesión de operaciones renglón

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema usando operaciones renglón en la matriz aumentada del siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_2 + x_3 &= -2\\
3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1\\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Solución:

Matriz Aumentada

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -2\\ 3 & 5 & -5 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right]$

2) $R_1 \leftrightarrow R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2\\ 3 & 5 & -5 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

3) ${}^{1}/_{2}\,R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 5 & -5 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$

4) $R_2 - 3R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

5) $-R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

6) $R_1 - 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

7) $R_3 - 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$

8) $-{}^{1}/_{3}\,R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

9) $R_1 + 5R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Esta es la matriz aumentada del sistema del sistema y la solución a mi sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 7\\
x_2 &= -2\\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$