Álgebra Superior I

L PROCESO DE GAUSS-JORDAN Y ANÁLISIS CUALITATIVO DE SOLUCIONES.

El proceso de reducción de Gauss-Jordan se usa para obtener un sistema de eq. simple al punto de poder describir explícitamente su solución.

¿Cómo podemos obtener dicho sistema?¿Se puede describir explícitamente? ¡Si!

FORMA ESCALONADA

Definición. Una matriz *(mxn)* B esta en forma escalonada si

1. Todos los renglones cuyas entradas son todas cero están hasta debajo de la matriz

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *cumple,*
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ No la incumple por vacuidad
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ No cumple

2. En todos los renglones no cero, la primer entrada no nula es igual a 1

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *cumple* 1 *y* 2

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *solo cumple uno*

3. Si el (i+1)-ésimo renglón es no cero, entonces la primer entrada no nula esta en una columna a la derecha de la primer entrada no cero del renglón i-ésimo

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Deben cumplir las 3 condiciones para ser escalonada.

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *cumple*
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ no cumple
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ cumple

Def. Una matriz en forma escalonada esta en forma escalonada reducida si la primer entrada no cero en un renglón es única entrada no cero en su columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de un sistema en forma escalonado reducido

Ejemplo 1: Describa la solución del sistema con la sig., matriz aumentada

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

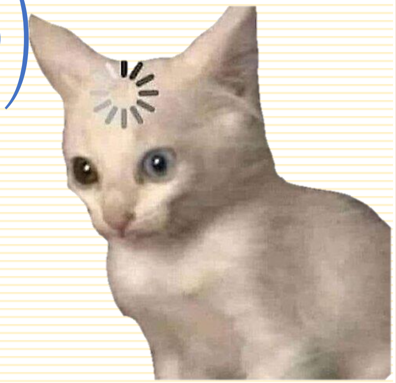
Sol. El sistema asociado a B es:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto la única solución del sistema es, $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 7$

Ejemplo 2: Describa la solución del sistema de ecuaciones con la siguiente matriz aumentada

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$



Solución: El sistema asociado es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 0 \;\; = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \rightarrow 0 = 1! \end{aligned}$$

Como ningún valor para x_1, x_2, x_3 satisfacen la 3ra ecuación,

El sistema **NO** tiene ninguna solución.

Definición: Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene ninguna solución, decimos que es inconsistente

Ejemplo 3: Describa la solución del sistema con la siguiente matriz aumentada:

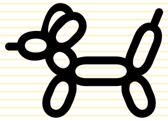
$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

Solución: El sistema asociado a D es

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \qquad + 4x_4 &= 2 \\ x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos despejar x_1 y x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 3x_2 - 4x_4 \\ x_3 &= 1 + 5x_4 \end{aligned}$$



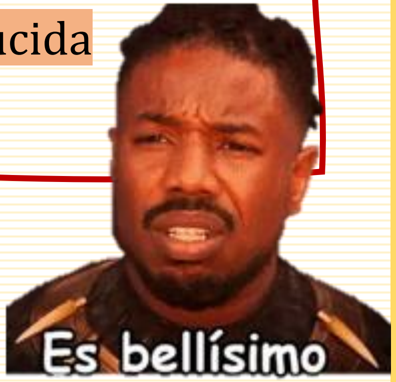
El sistema tiene una solución por cada valor que le asignemos a x_2 y x_4

Por ejemplo, para $x_2 = 0, x_4 = 1, x_1 = -2, x_3 = 6$

Procedimiento de reducción de Gauss-Jordán:

Teorema: Sea **B** una matriz (mxn) Entonces existe una única matriz C tal que:

1. C esta en forma escalonada reducida
2. C es equivalente a B



Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 11x_5 &= 28 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= -13 \\ -3x_3 + x_4 + 6x_5 &= -10 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 8x_4 - 28x_5 &= 61 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 3 & -4 & -11 & 28 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 & -10 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 & 61 \end{array}\right)$$ es la matriz aumentada

Aplicando el proceso de Gauss Jordán que es la forma escalonada

a_{11} es cero o no cero

Queremos convertirlo en 1, a_{11} entonces al renglón 1 le sumamos el renglón 2

$$R_1 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -6 & 15 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 & -10 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 & 61 \end{array}\right)$$

$$R_2 + R_1, R_4 - 3R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -10 & 16 \end{array}\right)$$

$R_1 - 2R_2, R_3 + 3R_3, R_4 - 4R_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ya esta en forma escalonado reducido
El sistema asociado es:

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_5 = 3 \\ x_3 - x_5 = 2 \\ x_4 + 3x_5 = -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 + 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 2 - x_5 \\ x_4 = -4 - 3x_5 \end{array} \quad \textit{es mi solución}$$

THE END

Análisis cualitativo de sistema de ecuaciones lineales

Posibles soluciones de sistemas consistentes.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Objetivo: Obtener tanta información como sea posible del conjunto de soluciones sin resolver el sistema, Es decir, hacer un análisis cualitativo.

Sea $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ la matriz aumentada del sistema de arriba.

Sabemos que existe una matriz $[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}]$ en forma escalonada reducida equivalente a $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$

Haremos algunas observaciones de la matriz $[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}]$ y su sistema asociado

Observación 1: El sistema asociado a

$[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}]$ *es consistete* $\Leftrightarrow$ *tiene un renglon de la forma*

$$[0,0, \dots, 0,1]$$

$$\Leftarrow)\ 0 = -0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

$$\Rightarrow)\ Pendiente$$

Observación 2: Toda variable que corresponde a un "1 líder" en un renglón de

$[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}]$ *es una variable dependiente, e decir, se puede expresar en terminos de variables independientes*

ejemplo: la matriz escalonada reducida

$$[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}] = \left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Cada columna}$$

corresponde a una variable

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \quad +3x_4 \quad + 4x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 \quad +3x_6 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 + x_6 = 2 \end{array}$$

Las variables correspondientes a los $1's$ líderes son

$$x_1, x_3 \text{ y } x_5.$$

Se pueden expresar en términos de las variables independientes como sigue:

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4 - 4x_6$$
$$x_3 = 2 - 2x_4 - 3x_6$$
$$x_5 = 2 - x_6$$

Observación 3: Sea r el número de renglones no nulo en $[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}]$. *Entonces*

$$\boldsymbol{r \le n + 1}$$

$$[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad r = 3$$

$$n + 1 = 7$$

Puedo tener a lo más n+1, 1-lideres, Y los 1-líderes están en correspondencia con los renglones no nulos

Por eso $\boldsymbol{r \le n + 1}$

Observación 4: Supongamos que **[C|d]** representa un sistema consistente.

Sea r el número de renglones no nulos de **[C|d].** Entonces

$\boldsymbol{r \le n}$

Todo eso se resume en:

Teorema 3: Supongamos que **[C|d]** representa un sistema consistente

Sea r el número de renglones no nulos en **[C|d]**

Entonces

$\boldsymbol{r \le n}$, *y la solución del sistema tiene* $\boldsymbol{n - r}$ variables independiente. Como consecuencia, cualquier sistema:

Es inconsistente ⇝ *no tiene soluciones*

Es consistente ⇝ $\begin{cases} \textbf{\textit{tiene}} \ \infty \ \textbf{\textit{soluciones}} \\ \textbf{\textit{tiene 1 única solución}} \end{cases}$

Corolario: Considere un sistema de tamaño *(mxn)*. Si ***m<n***, entonces el sistema o es inconsistente o tiene infinitas soluciones

Es decir si tengo menos ecuaciones que variables, entonces tengo 0 o infinitas soluciones

Ejemplo: Haga un análisis cualitativo del siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Notemos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ es una solución de sistema. Así que es consistente.

Como tengo menos ecuaciones que variables, entonces por el corolario anterior tengo infinitas soluciones

Sistemas homogéneos

Un sistema de tamaño (mxn) de la sig. Forma se dice que es homogéneo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad + \cdots + \quad a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad + \cdots + \quad a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \quad + \cdots + \quad a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que un sistema homogéneo siempre es consistente porque

$x_1 = x_2 = \cdots . = x_n = 0$ es una solución (solución trivial)

Teorema: Un sistema homogéneo de tamaño *(mxn)* con *m<n* tiene infinitas soluciones