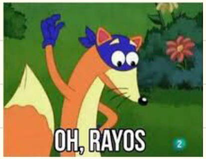
Determinantes

Como calcularlos y propiedades.

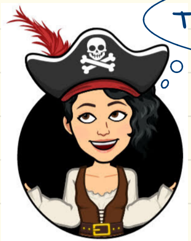
Determinantes

Definición (Determinante)

En Matemáticas se define el determinante como una forma multilineal alternada sobre un espacio vectorial.



Pero, ¿Qué onda con el determinante de una matriz?



Tengo información que te puede interesar

* Notación

Para $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ usamos la notación $\det(A)$, $\mathrm{Det}(A)$, o bien, $|A|$ para referirnos a determinante de A.

* Sólo calculamos el determinante de matrices cuadradas

* Hay un sitio con mucha información de determinantes

Wikipedia

es.wikipedia.org

El caso de matrices de orden inferior (orden 1, 2 o 3) es muy simple y su determinante se calcula con sencillas reglas conocidas. Dichas reglas son también deducibles del teorema de Laplace.

Una matriz de orden uno, es un caso trivial, pero lo trataremos para completar todos los casos. Una matriz de orden uno puede ser tratada como un escalar, pero aquí la consideraremos una matriz cuadrada de orden uno:

$$A = [a_{11}]$$

El valor del determinante es igual al único término de la matriz:

$$\det A = \det[a_{11}] = a_{11}\,.$$

El determinante de una matriz de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se calculan con la siguiente fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Dada una matriz de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz de orden 3 se calcula mediante la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Determinantes de orden superior [editar]

El determinante de orden n, puede calcularse mediante el teorema de Laplace a partir de una fila o columna, reduciendo el problema al cálculo de n determinantes de orden n-1. Para ello se toma una fila o columna cualquiera, multiplicando cada elemento por su cofactor. El cofactor de un elemento a_{ij} de la matriz es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila y columna correspondiente a dicho elemento, y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$, donde i es el número de fila y j el número de columna. La suma de todos los productos de los elementos de una fila (o columna) cualquiera multiplicados por sus cofactores es igual al determinante.

En caso de un determinante de orden 4, se obtienen directamente determinantes de orden 3 que podrán ser calculados por la regla de Sarrus. En cambio, en los determinantes de orden superior, como por ejemplo n = 5, al desarrollar los elementos de una línea, obtendremos determinantes de orden 4, que a su vez se deberán desarrollar en por el mismo método, para obtener determinantes de orden 3. Por ejemplo, para obtener con el método especificado un determinante de orden 4, se deben calcular 4 determinantes de orden 3. Esto puede aligerarse si previamente se logran tres ceros en una fila o columna, bastando entonces con calcular un determinante de orden 3 (ya que los demás determinantes estarán multiplicados por 0, lo que los anula).

La cantidad de operaciones aumenta muy rápidamente. Por ejemplo, mediante este método, para un determinante de orden 10 se deberán calcular 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 604.800 determinantes de orden 3.

También puede utilizarse el Método de eliminación Gaussiana, para convertir la matriz en una matriz triangular.

Determinantes para matrices de 1x1 ó 2x2

Tamaño	Fórmula	Ejemplo
$M_{1\times1}$	$\lvert a \rvert = a$,	$D = (-17)$, $\det(D) = -17$ $C = \left(\frac{93}{4}\right)$ $\lvert C \rvert = \frac{93}{4}$
$M_{2\times2}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ Producto de la diagonal menos el producto de la antidiagonal.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (7)(-1) - (-3)(5) = -7 + 15 = 8$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ \pi & -5\pi \end{pmatrix}$ $\lvert B \rvert = (-1)(-5\pi) - (\pi)(5) = 5\pi - 5\pi = 0$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1 - 0 = 1$

Determinante de una matriz de tamaño 3x3

Cofactores y Regla de Sarrus

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Determinante

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +3\left((1)(1)-(0)(2)\right) - 1\left((1)(1)-(-1)(2)\right) + 0\left((1)(0)-(-1)(1)\right)$$

$$= 3(1-0) - 1(1+2) + 0(0-0) = 3(1) - 1(3) + 0$$

$$= 3-3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} = \left((3)(1)(1)+(1)(0)(0)+(-1)(1)(2)\right)$$
$$-\left((0)(1)(-1)+(2)(0)(3)+(1)(1)(1)\right)$$
$$= (3+0-2)-(0+0+1) = 1-1 = 0$$

Cofactores (Siempre funciona $\forall n \in \mathbb{N}$)

- Seleccionar el primer renglón, o columna. Suponiendo que el renglón, o columna, seleccionada sea $(a_1 \ a_2 \cdots a_n)$ ó $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

- Para cada elemento a_i del renglón seleccionado calcular el determinante de la matriz A_{a_i} que resulta de quitar el renglón y la columna del elemento seleccionado

- El determinante de A será

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \, \text{Det}(A_{a_i})$$

Regla de Sarrus (Sólo para n=3)

- Calcular S_d la suma del producto de las n diagonales
- Calcular S_{ad} la suma del producto de las n antidiagonales.
- $\text{Det}(A) = S_d - S_{ad}$

Determinante de una matriz tamaño 4x4 o más grande

Para calcular el determinante de una matriz de tamaño nxn cuando n>3 hay una opción y es: proceder usando el método de cofactores.

Aquí en el primer paso elijo columna en vez de renglón porque la columna tiene dos ceros y el renglón no tiene ningún cero.
Elegir la opción con más ceros me va a ahorrar un poquito de trabajo.

Cofactores (Siempre funciona ü $\forall n \in \mathbb{N}$)

- Seleccionar el primer renglón, o columna. Suponiendo que el renglón, o columna, seleccionada sea $(a_1 \ a_2 \cdots a_n)$ ó $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- Para cada elemento a_i del renglón seleccionado calcular el determinante de la matriz A_{a_i} que resulta de quitar el renglón y la columna del elemento seleccionado
- El determinante de A será

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \, Det(A_{a_i})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix}$$

$$Det(A) = 1 \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[\big((-3)(2)(-6) + (1)(-4)(1) + (-2)(-2)(3)\big) - \big((1)(2)(-2) + (3)(-4)(-3) + (-6)(-2)(1)\big)\right]$$
$$- (-4)\left[\big((2)(2)(-6) + (1)(-4)(4) + (-2)(3)(3)\big) - \big((4)(2)(-2) + (3)(-4)(2) + (-6)(3)(1)\big)\right]$$
$$+ 0\,[\sim\sim\sim] - 0\,[\sim\sim\sim]$$

$$= 1\left[(36 - 4 + 12) - (-4 + 36 + 12)\right] + 4\left[(-24 - 16 - 18) - (-16 - 24 - 18)\right] = 1\,[44 - 44] + 4\,[-58 - (-58)] = 1(0) + 4(0) = 0 + 0 = 0$$

Propiedades del determinante de una matriz

Teorema:

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

entonces

1) $Det(I_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $Det(AB) = Det(A)\,Det(B)$

3) $Det(A) = Det(A^T)$

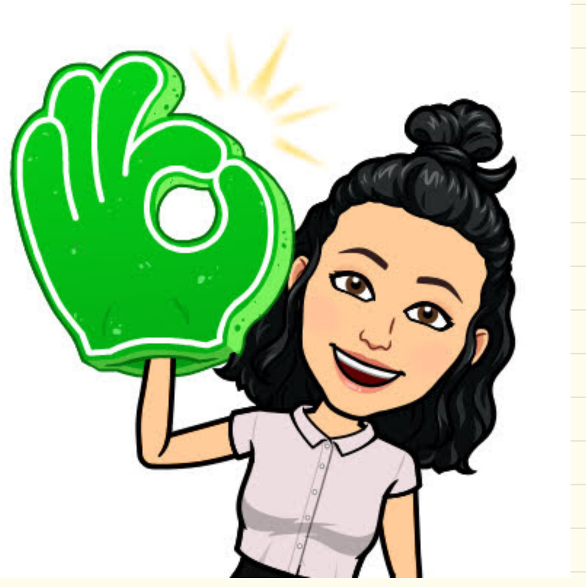
4) Si B es la matriz que resulta de intercambiar dos renglones de A entonces $Det(A) = -Det(B)$

5) Si B resulta de multiplicar un renglón de A por α entonces $Det(B) = \alpha\, Det(A)$

6) $Det(\alpha A) = \alpha^n\, Det(A)$

7) $Det(A) \neq 0 \leftrightarrow Rang(A) = n$

$\leftrightarrow$ A es invertible



Proposición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n \geq 2$. Si A es una matriz triangular entonces $Det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$

El determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas en la diagonal

Dem. (Por casos)

Caso 1 (matriz triangular inferior) (Inducción)

Paso base (Verificar para $n=2$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - 0(a_{21}) = a_{11}\cdot a_{22}$$

Paso inductivo. (Supongamos que la prop. se cumple para n y veamos que se cumple para $n+1$.)

Usaremos el método de cofactores para calcular el determinante de una matriz triangular inferior de tamaño $(n+1)\times(n+1)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \sim \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \sim \end{vmatrix} + \cdots + 0\begin{vmatrix} \sim \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

Matriz de tamaño n, por hip. de inducción, su determinante es el producto de la diagonal.

$\Downarrow$

$$= a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{n+1\,n+1}) + 0 + 0 + \cdots + 0 = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{n+1\,n+1}$$

Producto de la diagonal

La prop se cumple para la matriz de triangular de tamaño $(n+1)\times(n+1)$.

Caso 2 (matriz triangular superior)

Para una matriz triangular superior A, se tiene que A^T es una matriz triangular inferior y por lo tanto (Caso 1) la prop. se cumple para A^T. Luego como $Det(A) = Det(A^T) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ se tiene que el determinante de A es el producto de las entradas en la diagonal.

∎

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.