

Lista de Ejercicios: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Unidad 5. Álgebra Superior 1

Profesores: Arilín Haro y Luis Jorge Sánchez Saldaña.
Selección de ejercicios hecha por Brenda Navarro.

A continuación encontrarán una lista de ejercicios sugeridos para que practiquen el contenido de esta unidad. Como verán, están separados por temas para que los vayan resolviendo de acuerdo al avance con las notas y los vídeos.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de ecuaciones lineales, sus soluciones y reducción de Gauss-Jordan

Ejercicio 1. Encuentra la solución ó soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \end{array}$$

Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2. Encuentra la solución ó soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \end{array}$$

Justifica tu respuesta.

Ejercicio 3. Di si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales definidos en el campo $\mathbb{R}$ son equivalentes. Justifica tu respuesta.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & - & x_2 = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 = 0 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 & + & x_2 = 0 \\ x_1 & + & x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 4. Di si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales definidos en el campo $\mathbb{R}$ son equivalentes. Justifica tu respuesta.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 & + & 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -7x_1 & + & -7x_3 = -6 \\ x_1 & + & \frac{13}{2}x_2 + \frac{15}{2}x_3 = -1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con entradas reales. Suponga que A es una matriz escalonada reducida por renglones y que $a + b + c + d = 0$. Demuestra que existen exactamente dos de estas matrices.

Criterios de existencia de soluciones

Ejercicio 6. Encuentra las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$$

¿Para qué valor(es) de k , si hay alguno, el sistema tendrá

i) ninguna solución, ii) una solución única, iii) un número infinito de soluciones?.

Ejercicio 8. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 = 1 \\ kx_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

¿Para qué valor(es) de k , si hay alguno, el sistema tendrá

i) ninguna solución, ii) una solución única, iii) un número infinito de soluciones?.

Ejercicio 9. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

¿Para qué valor(es) de k , si hay alguno, el sistema tendrá

i) ninguna solución, ii) una solución única, iii) un número infinito de soluciones?.

Ejercicio 10. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = k \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = k^2 \end{cases}$$

¿Para qué valor(es) de k , si hay alguno, el sistema tendrá

i) ninguna solución, ii) una solución única, iii) un número infinito de soluciones?.

Matrices y operaciones con matrices: Suma, Resta, Multiplicación y Transpuesta.

Ejercicio 11. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcula lo siguiente: $A + B$, $2B - 4C$, $A - 3C + 4B$ y $C - 4A$.

Ejercicio 12. Da ejemplos de matrices A y B en $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tales que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ejercicio 13. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad y \quad iii) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ en $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determina una condición que debe satisfacer a , para que exista una matriz $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ distinta de la matriz cero, tal que $A \cdot B = 0$.

Ejercicio 15. Da ejemplos de matrices $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tales que $A \neq 0$ y $B \neq 0$ pero $A \cdot B = 0$.

Determinantes: Cálculo y propiedades.

Ejercicio 16. Sea $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 4 & 2a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Encuentra todos los valores de A tales que $\det(A) = 0$.

Ejercicio 17. Sean $a, b \in \mathbb{R}$; calcula: $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \\ \operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} \cos(a) & \operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{vmatrix}$.

Ejercicio 18. Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\det(c \cdot A) = c^3 \det(A)$.

Ejercicio 19. Demuestra que, en general, no se cumple que:

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

Ejercicio 20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Encuentra todos los valores de A para que $\det(A) \neq 0$.