Cimientos Matemáticos

Módulo 1: Los números naturales

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. MÓDULO 1: *LOS NÚMEROS NATURALES*

Los números *naturales* son los primeros que conocemos a una temprana edad. Nos sirven para contar o enumerar. Podemos contar 5 sillas, 2 gatos, 1 celular, 21 niñas o 174 alumnos, los 15 años de alguien. Pero claro que no podríamos contar 7.4 lápices, 2/5 celulares o -7 alumnos.

Definición.

Los números *naturales* son todos los *enteros positivos*. Usamos la letra $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de los naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}.$$

Los números naturales son *infinitos*, es decir, puedes observar que hay un comienzo que es el número 0, pero no hay un último elemento.
Imaginemos que a y b son dos números naturales cualesquiera. Esto se escribe de la siguiente manera:

$$a, b \in \mathbb{N}$$

Se lee: **a** y **b** pertenecen a $\mathbb{N}$.

Definición.

Vamos a decir que *a divide a b* si existe un número natural c tal que

$$c \times b = a.$$

Ejemplo 1.

1. 20 divide a 100, pues el 5 es un número tal que $5 \times 20 = 100$.
2. 4 divide a 8, pues el 2 es un número tal que $2 \times 4 = 8$.
3. 7 divide a 21, pues 3 es un número tal que $3 \times 7 = 21$.
4. 45 divide a 135, pues el 5 es un número tal que $5 \times 45 = 135$.
5. 3 **NO** divide a 20, pues no existe un número natural c tal que $3 \times c = 20$.

Lo siguiente es que vamos a explorar las propiedades que conoces de los números, su multiplicación y su divisibilidad.

1.1. *Múltiplos*

Definición.

Si tomamos un número natural cualquiera n y lo vamos *multiplicando* por 1, por 2, por 3, etcétera, obtenemos los *múltiplos* de **n**.

Ejemplo 2.

1. Los múltiplos de 7 son: $M(7) = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, \ldots\}$.
2. $M(9) = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, \ldots\}$.
3. $M(10) = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, \ldots\}$.

Si **k** es cualquier número natural, denotaremos por **M(k)** a todos los múltiplos de **k**, así:

$$M(k) = \{1 \times k, 2 \times k, 3 \times k, 4 \times k, 5 \times k, 6 \times k, 7 \times k, 8 \times k, \ldots\}$$

.

Observación: Un número natural tiene *infinitos múltiplos*, y por ello usamos los puntos suspensivos para indicar que continúa la serie en forma infinita.

1.1.1. *Mínimo común múltiplo (mcm)*

Definición.

El *mínimo común múltiplo* de dos o más números es el menor de los múltiplos que tienen en común esos números.

Ejemplo 3.

Encontrar el mcm de 9 y 12.

Solución:
Primero escribimos algunos múltiplos de cada número 9 y 12.
Los múltiplos de 9 son: $M(9) = \{9, 18, 27, \mathbf{36}, 45, 54, 63, \mathbf{72}, 81, 90, 99, \mathbf{108}, ...\}$.
Los múltiplos de 12 son: $M(12) = \{12, 24, \mathbf{36}, 48, 60, \mathbf{72}, 84, 96, \mathbf{108}, 120, , ...\}$.

Veamos que los múltiplos comunes de 9 y 12 son los que están en negritas: $36, 72, 108, ...$ .Entonces el mínimo entre estos dos números es 36, por lo tanto

$$mcm(9, 12) = 36$$

. Esto se llama encontrar el mínimo común múltiplo por *inspección simple*.

Ejemplo 4.

Encontrar el mcm $(9, 6)$.
Solución: Primero escribimos algunos múltiplos de cada número: 9 y 6.

1. $M(9) = \{9, \mathbf{18}, 27, \mathbf{36}, 45, \mathbf{54}, 63, \mathbf{72}, 81, \mathbf{90}, 99, 108, ...\}$.
2. $M(6) = \{6, 12, \mathbf{18}, 24, 30, \mathbf{36}, 42, 48, \mathbf{54}, 60, 66, \mathbf{72}, 78, ...\}$.

Veamos que $18, 36, 54, 72, 90, etc.$ son múltiplos comunes de 9 y 6, pero el mínimo es el 18, así que:

$$mcm(9, 6) = 18.$$

Ejemplo 5.

Luisa y Sergio van con el mismo peluquero. Luisa va cada 8 semanas, mientras que Sergio va cada 6 semanas. Si hoy fueron los dos, ¿dentro de cuánto tiempo será la próxima vez que coincidan?

*Solución:*Luisa irá dentro de $8, 16, 24, 32, ...$ semanas. Sergio dentro de $6, 12, 18, 24, ...$ semanas. El $mcm(6, 8) = 24$ así que será dentro de 24 semanas.

1.2. *Divisores*

Definición.

Los *divisores* de un número son los que lo dividen de forma exacta, es decir, que al dividirlo, *el residuo obtenido es cero.*
Denotamos a los divisores de un número como $D(n)$, siendo **n** cualquier número natural.

Nota: El 1 siempre aparece como divisor de cualquier número y que cualquier número es divisor de sí mismo.

Ejemplo 6.

- Los divisores de 8 son: $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$.
- $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$.
- $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

1.2.1. *Máximo Común Divisor (MCD)*

Definición.

El *Maximo común divisor (MCD)* de dos o más números es el mayor de sus *divisores comunes.*

Ejemplo 7.

Encuentra el $MCD(24, 40)$.

Solución: Buscamos todos los divisores de 24 y 40 primero.
$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.

Los divisores comunes de 24 y de 40 : $1, 2, 4, 8$. Así que:

$$MCD(24, 40) = 8.$$

Ejercicio 1.

Encuentra los primeros 7 múltiplos de:

1. 3.
2. 8.
3. 10.
4. 12.
5. 17.
6. 21.

Ejercicio 2.

Escribe TODOS los divisores de:

1. 10.
2. 15.
3. 21.
4. 25.
5. 30.
6. 32.

Ejercicio 3.

Encuentra lo que se pide en cada inciso.

1. $mcm(6, 8)$.
2. $mcm(8, 12)$.
3. $mcm(9, 15)$.
4. $mcm(12, 15)$.
5. $MCD(16, 24)$.
6. $MCD(20, 32)$.
7. $MCD(32, 48)$.

Ejercicio 4.

A veces sucede que el $mcm(a, b) = a \times b$. Por ejemplo:

$$mcm(3, 5) = 15, \qquad mcm(3, 8) = 24, \qquad mcm(9, 10) = 90.$$

Pero esto no pasa siempre, pues por ejemplo $mcm(9, 6) = 18$ y no 54.

¿Cuándo podemos decir que el mínimo común múltiplo de dos números se puede obtener multiplicándolos?

1.3. *¿Qué es Factorizar?*

Definición.

Los divisores de un número también se llaman *factores. Factorizar* significa descomponer un número en factores, es decir, escribirlo como una multiplicación de números.

Veamos los siguientes ejemplos para que este más clara esta definición.

Ejemplo 8.

Los divisores de 12 son: $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Entonces el 12 se puede escribir de las siguientes maneras:

- $12 = 1 \times 12$.
- $12 = 2 \times 6$.
- $12 = 3 \times 4$.
- $12 = 4 \times 3$.
- $12 = 6 \times 2$.
- $12 = 12 \times 1$.

Ejemplo 9.

Los divisores de 60 son: $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Factoricemos el 60:

- $60 = 1 \times 60$.
- $60 = 2 \times 30$.
- $60 = 3 \times 20$.
- $60 = 4 \times 15$.
- $60 = 5 \times 12$.
- $60 = 6 \times 10$.

Ejercicio 5.

Escribe todos los divisores de cada número y factorízalo de todas las maneras que se pueda.

- 38.
- 40.
- 32.
- 35.
- 25.
- 45.
- 31.
- 27.
- 29.
- 17.
- 36.

1.4. *Números primos y compuestos*

Definición.

Veamos que hay números que solo tienen *dos divisores*, por ejemplo el 17, el 29 o el 31, que solo se pueden dividir entre sí mismos y entre 1. A esos números se les llama *números primos*.

Números primos: Son los que tienen sólo dos divisores, es decir, solamente son divisibles entre sí mismos y entre la unidad.

Ejemplo 10.

Veamos que $17, 13, 11, 23, 31, 43, 7, 29$ son números primos.

Definición.

Números compuestos: Son los que tienen *más de dos divisores*. O sea que además de ser divisibles entre sí mismos y entre 1, lo son entre más números.

Ejemplo 11.

Por lo definido anteriormente veamos $9, 12, 15, 18, 20, 21, 40, 60, 63$ son números compuestos.Ya que el número 9 lo podemos ver como $3x3$, al $12 = 4x3, 18 = 3x3x2$.

Los números primos han sido desde la antigüedad causa de curiosidad. Los griegos los descubrieron desde muy temprano y fue *Eratóstenes* quien ideó una manera de localizar fácilmente los primos: *la criba de Eratóstenes*.

Definición.

La *criba de Eratóstenes* consiste en elaborar una tabla con los naturales hasta cierto número n, digamos 100, 1000 o $10,000$ y hacer lo siguiente:

- Tachar el 1.
- Tachar los múltiplos de 2, exceptuando el 2.
- Tachar los múltiplos de 3, exceptuando el 3.
- Tachar los múltiplos de 5, exceptuando el 5.
- Tachar los múltiplos de 7, exceptuando el 7.
- Etcetera...

Se tachan todos los múltiplos de los números primos que sean menores que n, donde n es el número natural hasta donde llega la Criba. Puede demostrarse que si n no es divisible entre ningún primo menor que n, entonces n es primo.

Ejercicio 6.

Realiza la criba de Eratóstenes para $n = 100$ con la tabla siguiente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números sin tachar son los números primos menores que 100 y los circulamos. ¿Cuáles son?.

1.5. *Algoritmo de División*

En la escuela primaria hemos aprendido a dividir:

$$\text{Divisor} \rightarrow 3 \,\overline{\big)\, 20 \,}\; \leftarrow \text{Dividendo}$$

¿Qué hacemos para dividir?

De todos los múltiplos de 3 menores que 20, buscamos el mayor. Esto es:

Múltiplos de 3 menores que 20: 3, 6, 9, 12, 15, 18

El mayor: 18

Al ser un *múltiplo* de 3, existe un número c que multiplicado por 3, da 18.

Este número lo seleccionamos como *cociente* y lo escribimos arriba de la casita:

$$\begin{array}{r l} 6 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 3 \,\overline{\big)\, 20 \,} & \leftarrow \text{Dividendo} \end{array}$$

Finalmente nos fijamos en la *diferencia* que hay entre 20 y 18, esto es: $20 - 18 = 2$. Este número es el *residuo* o *resto* de la división. Lo escribimos debajo del dividendo.

$$\begin{array}{rrl} & 6 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 3 & \overline{\big)\,20} & \leftarrow \text{Dividendo} \\ & 2 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Definición.

Una vez hecha la división, se debe cumplir que:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{COCIENTE} \times \text{DIVISOR} + \text{RESIDUO}.$$

Ejemplo 12.

En nuestro ejemplo anterior tenemos que:

$$20 = 6 \times 3 + 2.$$

Definición.

Imagina que **a** y **b** son dos números naturales y además $a < b$, es decir, **a** es menor que **b**. Al hacer la división de **a** entre **b** obtenemos dos números naturales **c** y **r** que cumplen:

$$b = cxa + r.$$

El número **c** se llama *cociente incompleto*.
El número **r** se llama *residuo*.

Ejemplo 13.

1. Al dividir 20 entre 3, tenemos que $20 = 6x3 + 2$.
2. Al dividir 7 entre 2, se obtiene que $7 = 3x2 + 1$.
3. Al dividir 14 entre 10, se obtiene que $14 = 1x10 + 4$.

Ejercicio 7.

Encuentra el cociente c y el residuo r cuando b se divide entre a.

- $a = 3, b = 21$.
- $a = 5, b = 28$.
- $a = 6, b = 45$.
- $a = 10, b = 729$.
- $a = 12, b = 90$.

Ejercicio 8.

¿Qué pasa si $b < a$? ¿Se puede dividir **b** entre **a**? ¿Cuál es el cociente y el residuo en tal caso? Examina algunos ejemplos y escríbelos.

1.6. *Divisibilidad*

Definición.

Se dice que un número a, es *divisible* entre un número b, cuando al dividir a entre b, el residuo es cero.

Ejemplo 14.

1. 24 es divisible entre 8
2. 18 es divisible entre 6
3. 21 es divisible entre 7.
4. 15 es divisible entre 5
5. 27 es divisible entre 9.

Pero

6. 20 No es divisible entre 3.
7. 14 NO es divisible entre 5.
8. 12 NO es divisible entre 7.

1.6.1. *Criterios de Divisibilidad*

Definición.

Los *criterios de divisibilidad* nos sirven para saber rápidamente si un número es divisible entre $2, 3, 4, 5, 6$, etc. Daremos algunos de los más usuales.

Un número es divisible entre:

- *DOS* Cuando termina en cifra par $(2, 4, 6, 8, 0)$.
- *TRES* Cuando la suma de todas sus cifras es un múltiplo de tres.
- *CUATRO* Cuando sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de cuatro.
- *CINCO* Cuando termina en 0 o en 5.
- *SEIS* Cuando es divisible entre 2 y también entre 3.

Ejemplo 15.

1. $4,792, 67,496, 17,514$ son divisibles entre 2. $373, 451, 1,945$ no son divisibles entre 2.
2. $31,452$ es divisible entre 3 porque $3 + 1 + 4 + 5 + 2 = 15$ que es múltiplo de 3.
3. $71,428, 544, 35,032$ son divisibles entre 4.
4. $375, 1,920, 390$ son divisibles entre 5.

Ejercicio 9.

53 154 es divisible entre 6, ¿por qué?

Definición.

- *SIETE.* Cuando la diferencia entre las decenas y el duplo de las unidades es cero o un múltiplo de 7.
- *OCHO.* Cuando sus tres últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de ocho
- *NUEVE.* Cuando la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9.

Ejemplo 16.

1. $3,78$ es divisible entre 7. Veamos por que: $3,78$ tiene 37 decenas y 8 unidades. Restando $37 - 2x8 = 37 - 16 = 21$, obtenemos un múltiplo de 7.
2. 546 es divisible entre 7 porque $54 - 2x6 = 54 - 12 = 42$ que es múltiplo de 7. Si al hacer esto no se sabe si el número obtenido es múltiplo de 7, vuelve a aplicarse el criterio, por ejemplo en 42 se tiene que $4 - 2x2 = 4 - 4 = 0$.
3. Ejemplos para el 8: a) Si la cifra de las centenas es par, las dos últimas cifras deben formar un múltiplo de 8. $1832, 57448$ son divisibles entre 8.
4. b) Si la cifra de las centenas es impar, las dos últimas cifras deben formar un múltiplo de 8 aumentado o disminuido en 4 unidades. $3512, 7120$ son divisibles entre 8.
5. 45126 es divisible entre 9.

Ejercicio 10.

Completa la siguiente tabla escribiendo la palabra SI o NO, según sea el caso. Usa los criterios de divisibilidad.

	Es divisible entre								
Número	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2349									
2004									
11 520									
143 928									
1992									

1.7. *Factorización de Primos*

Ya hemos visto lo que es factorizar, y que un número compuesto se puede factorizar de varias maneras. Por ejemplo $24 = 2x12 = 3x8 = 6x4$. *Un número primo no tiene otra factorización más que la trivial*, como $23 = 23x1$.

Definición.

La *factorización completa* consiste en factorizar *sucesivamente un número* hasta donde sea posible, o sea, hasta que nos queden solamente factores primos.

Ejemplo 17.

- 150 es un número compuesto. Factorizándolo tendíamos:$150 = 15x10 = 3x5x2x5 = 2x3x5^2$.
- $315 = 105x3 = 21x5x3 = 7x3x5x3 = 3^2x5x7$.
- o bien; $315 = 5x63 = 5x7x9 = 5x7x3^2$.
- $100 = 2X50 = 2X25X2 = 2X5X5X2 = 2^2X5^2$.
- o bien; $100 = 10x10 = 2x5x2x5 = 2^2x5^2$.

Veamos que podemos factorizar completamente un número, de varias maneras, pero de cualquier forma llegaremos a lo mismo. *La factorización en primos es única.* Usamos los criterios de divisibilidad.

Ejercicio 11.

Factorizar en primos los siguientes números.

1. 348.
2. 800.
3. 945.
4. 1000.
5. 1024.
6. 1260.
7. 333.
8. 840.
9. 240.
10. 429.
11. 1001.
12. 2020.

Ejemplo 18.

La factorización en primos sirve, entre otras cosas, para calcular el mcm y el MCD de cualesquiera dos números naturales.

Supongamos por ejemplo que queremos calcular el $mcm(24, 60)$.

Podemos factorizar en primos ambos números:

$$24 = 12x2 = 2x2x6 = 2x2x2x3 = 2^3x3 \quad \text{o} \quad 60 = 10x6 = 2x5x3x2 = 2^2x3x5$$

Basta tomar el producto de los primos que aparecen en alguna de estas dos descomposiciones, cada uno elevado a la mayor potencia que aparezca. En este caso: $2^3x3x5 = 120$

1.8. *Ejercicio y problemas*

1. Completa la siguiente tabla.

Dividendo.	Divisor.	Cociente.	Residuo.
60	7		4
42	6	7	
		7	8
43		8	3
139	11	12	
170	13		1
	115	71	93
8934		198	24

2. Al dividir 16 entre 7 se obtiene un cociente igual a 2 y un residuo también igual a 2, es decir, el cociente y el residuo que se obtienen son iguales. Encuentra todos los números que al dividirse entre 7 den el mismo cociente y residuo.

3. Un terreno que mide $80m$ por $150m$ se quiere fraccionar en lotes de $20m$ por $30m$. ¿Cuántos lotes caben en el terreno? Haz un dibujo para indicar cómo lo dividirías. ¿Se puede dividir un terreno de $110m$ por $120m$ en lotes de $20m$ por $30m$? ¿Y uno de $70m$ por $120m$ en lotes de $20m$ por $40m$?

4. ¿Cuántas cajitas de 5 cm de largo, 2 cm de fondo y 3 cm de alto caben en una caja de 28 cm de largo por 18 cm de fondo y 50 cm de alto?

5. De todos los rectángulos cuya área es igual a 144, ¿Cuál tiene menor perímetro? (Toma en cuenta sólo medidas enteras)

6. ¿Cuántos paralelepípedos de dimensiones enteras hay que tengan un volumen igual a 60 unidades cúbicas?

7. Por lo general tu cumpleaños se recorre un día de un año al otro, aunque hay veces que se recorre dos días. Por ejemplo, si en 2020 cumpliste años en martes, en 2021 los cumplirás en miércoles. ¿por qué ocurre esto? ¿Por qué a veces no ocurre? ¿En qué día de la semana naciste? ¿En qué día cumplirás 25 años?

8. ¿De cuántas maneras distintas pueden completarse las líneas en blanco para que el número resultante sea divisible entre 3 y entre 5? En cada línea en blanco puedes poner un dígito.

   3_7_.

9. Considera todos los números que pueden obtenerse permutando (cambiando de lugar) las cifras de 8025. ¿Cuántos son divisibles entre 2? ¿Entre 3? ¿Entre 5? ¿Entre 9?

10. ¿Cuál es el menor número que puede dividirse entre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10?

11. 11. Considera las listas de los múltiplos de 72 y 84:
$M(72) = \{72, 144, 216, ..., \}$
$M(84) = \{84, 168, 252, \}$

¿Cuáles son los números que aparecen en ambas listas? Escribe los seis primeros.

12. ¿En cuántos ceros termina el producto $1x2x3x4x...x25$?

13. Decía el guardia de una tienda: "Un día trabajo el turno de la mañana, al otro día el de la tarde, al día siguiente el de la noche y luego descanso todo el día". Si le tocó descansar el primer domingo de enero. ¿Cuántos domingos descansará en todo el año?

14. "Tengo un problema – decía un profesor –. Si formo a mis alumnos de dos en dos, me sobra uno. Si los formo de tres en tres, me sobran dos; de cuatro en cuatro, me sobran tres; de cinco en cinco, me sobran cuatro; y de seis en seis me sobran cinco. "¡Has de tener muchos alumnos!" – le dijo un compañero –. "¡Ni tantos! Si son menos de 70" ¿Cuántos alumnos tiene el profesor?

15. Exactamente una de las siguientes afirmaciones del número de mi casa es falsa.
    - La suma de las cifras del número es 6.
    - Dos de las cifras del número son iguales.
    - El número es menor que 110.
    - El número es mayor que 40.
    - El número es primo. ¿Cuál es el número de mi casa?

16. Rebeca vive en el mismo edificio que yo, pero no sé en qué departamento. Le pregunté a 4 de mis vecinos el número de departamento de Rebeca. Ellos dicen que:
    - Vecino 1: El número de su departamento es el 9.
    - Vecino 2: El número de su departamento es primo.
    - Vecino 3: El número de su departamento es par.
    - Vecino 4: El número de su departamento es el 15.

    El portero no quiso decirme en qué departamento vive Rebeca, pero me aseguró que exactamente 2 de las afirmaciones anteriores son falsas. ¿En qué departamento vive rebeca?

17. ¿Cuántos números naturales n cumplen que al dividir 399 entre n queda 14 de residuo?

18. Un vendedor de naranjas tiene n naranjas. Se dio cuenta que si acomoda sus n naranjas en grupitos de 3 en 3, o de 4 en 4, o de 5 en 5 o de 6 en 6, siempre le sobra 1. Se acuerda que tiene entre 50 y 100 naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene el vendedor?