Cimientos Matemáticos

Módulo 2: Los números enteros

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. MÓDULO 2: *LOS NÚMEROS ENTEROS*

1.1. *¿Que son los números enteros?*

Ejemplo 1.

Ya conocemos a los números naturales $\mathbb{N}$, también llamados *los números enteros positivos.* Sabes que con ellos se pueden hacer algunas operaciones que ya has aprendido. ¿Qué operaciones se pueden hacer en $\mathbb{N}$?

La *suma* siempre se puede hacer. **Ejemplo** $3 + 4 = 7; 14 + 56 = 70, etc.$

La *resta* no siempre se puede hacer. Podemos restar $7 - 4 = 3$, pero la operación $4 - 7$ no la podemos resolver en los números naturales, para ello necesitamos otros números: los negativos.

El *producto* (multiplicación) siempre se puede hacer. $3x4 = 12$; $23x12 = 276, etc.$

El *cociente* (división) no siempre puede efectuarse, pues por **Ejemplo** $20/3$ nos da un número que no es natural.

En este capítulo vamos a introducir a los *negativos.* De esta manera, los números enteros forman el siguiente conjunto.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

1.2. *Los negativos*

Definición.

Cada número natural $1, 2, 3, 4, ...$ tiene asociado un *negativo* o también llamado *simétrico*, por ejemplo: $-1, -2, -3, -4, ...$

- El negativo de 7 es -7.
- El simétrico de 10 es -10.

Si dibujamos una recta numérica ordenando a los números naturales: $1, 2, 3, 4, ...$ es como si pusiéramos un espejo en el cero y entonces todos los números se reflejan así:

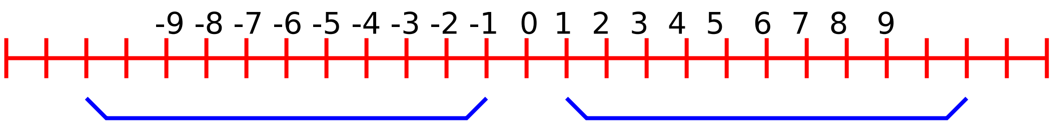

Figura 1: Los números a la derecha del cero representan a los números positivos, y reflejado como espejo los números que estan a la izquierda del cero son su parte contraria, es decir, los números negativos.

Definición.

El cero es el único número que no tiene *simétrico.* También podríamos decir que su simétrico (su negativo) es el mismo.

En general, si a es un número entero, su *negativo* se denota por $-a$.

De esta manera, decimos que los números naturales son *positivos* y sus simétricos son *negativos.*

¿Cuál es la ventaja? Existen muchas ventajas de trabajar con números positivos y negativos. Por ejemplo se usan para medir temperaturas sobre cero y bajo cero, para resolver problemas de deudas y ganancias, pérdidas e ingresos, pero sobre todo *¡ahora siempre tiene sentido la resta!* En los naturales no podíamos hacer $2 - 3$. En los enteros esta resta vale -1.

Ejemplo 2.

Puede resultar un poco extraño, pero también se puede hablar del *negativo* de un número negativo. Por ejemplo:

- $-(-10) = 10$.
- $-(-1) = 1$.
- $-(4) = -4$.
- $-(+2) = -2$.

En este caso también usamos *paréntesis* para separar los signos menos "$-$".

De hecho podríamos escribir expresiones tan raras como ésta:

$$-(-(-2)).$$

Esto se lee: *el simétrico del simétrico* de -2, ¿de qué número se trata? Pues veamos: El simétrico de -2 es 2, y el simétrico de 2 es -2. Por lo tanto se trata del número -2.

Ejercicio 1.

¿Cuánto vale la expresión $-(-(-(-(-1))))$?.

1.3. *¿Cómo se ordenan los números enteros?*

Definición.

Probablemente conoces los siguientes símbolos:

$>$ Mayor que $\qquad$ $<$ Menor que

Ejemplo 3.

Cuando trabajamos con números naturales resulta ya conocido cómo comparar dos de ellos, por ejemplo:

- $20 > 15$, el 20 es más grande que 15.
- $7 < 10$.
- $1 < 2$.
- $729 > 84$.

Como habrás imaginado, los negativos se comparan justo al revés:

- $-1 > -2$.
- $-20 < -15$.
- $-7 > -10$.
- $-729 < -84$.

En símbolos podemos escribir la siguiente regla general:

Nota

Si a y b son números naturales tales que $a < b$, entonces $-a > -b$.

Ejercicio 2.

Escribe $<, >$ o $=$ para comparar las siguientes parejas de números.

1. 2 $\quad$ 6
2. 1 $\quad$ 6
3. 4 $\quad$ 8
4. -5 $\quad$ -15
5. 82 $\quad$ 47
6. -82 $\quad$ -47
7. -50 $\quad$ -100

Ejemplo 4.

Ahora bien, dados dos números: uno positivo y uno negativo *siempre es mayor el positivo que el negativo.* **Por ejemplo**:

$$-1 < 2. \qquad 8 > -15. \qquad -40 < 7.$$

Ejercicio 3.

Escribe $<, >$ o $=$ para comparar las siguientes parejas de números.

1. $4 \quad -2$
2. $-1 \quad 7$
3. $14 \quad 15$
4. $-15 \quad -17$
5. $8 \quad -7$
6. $-1000 \quad 47$
7. $12345 \quad 1$
8. $-2020 \quad 2020$
9. $-1 \quad 1$

Finalmente hemos de señalar lo siguiente:

Nota

El cero es mayor que cualquier número negativo.
El cero es menor que cualquier número positivo.

Ejercicio 4.

Escribe $<, >, =$ para comparar las siguientes parejas de números.

1. $-5 \quad 0$
2. $0 \quad -1$
3. $-10 \quad -12$
4. $-7 \quad 1$
5. $0 \quad 0$
6. $20 \quad -30$
7. $-70 \quad 0$
8. $5 \quad 5$

1.4. *Valor absoluto*

Definición.

El *valor absoluto* es un concepto muy importante en matemática. Su definición precisa requiere de más experiencia de la que tenemos en este punto. Por ahora podemos pensar que todo número entero consta de dos partes:

- *Un signo.*
- *Un valor absoluto.*

Ejemplo 5.

En el número -7 el signo es "menos" y el valor absoluto es 7.
En el número 3 el signo es "más" y el valor absoluto es 3.

Conviene tener en mente que

Definición.

El valor absoluto de cualquier número es siempre positivo.

Simbólicamente usamos dos barras verticales para representar al valor absoluto:

$$|a| = \text{valor absoluto de } a$$

Ejemplo 6.

Ejemplo de lo antes dicho tenemos que:

- $|-1| = 1$.
- $|23| = 23$.
- $|-6| = 6$.
- $|2| = 2$.

1.5. *Suma y resta de números enteros*

Definición.

En esta sección supongo que conoces bien la *suma* y la *resta* de números naturales, o sea, de números enteros positivos.

En una *suma*, los números que se suman se llaman *sumandos*. En una *resta*, al primer número se le llama *minuendo* y al segundo *sustraendo*. De este modo: En realidad la resta es la operación *inversa* de la suma, en el siguiente sentido: resolver la resta $a - b$ tiene por objetivo encontrar un número c tal que sumado con b nos dé como resultado a.

$$\text{Si } a - b = c \text{ , entonces } c + b = a.$$

Si queremos restar $5-3$ debemos encontrar un número que sumado con 3 nos de 5. Si queremos restar $47-23$ debemos encontrar un número que sumado con 23 nos de 47 etcétera.
En otras palabras, restar equivale a encontrar un número llamado *diferencia* tal que sumado con el *sustraendo* nos dé como resultado el *minuendo*.

$$Minuendo - sustraendo = diferencia.$$

OJO:Cuando el *minuendo* es mayor que el *sustraendo*, esta diferencia existe y es *siempre un número positivo*.

Ejemplo 7.

Pero siguiendo lo dicho antes en la definición, cuando es mayor el sustraendo que el minuendo, las cosas se complican un poco, pues por ejemplo, no existe un número positivo que sumado con 5 nos de 3:

$$5 + \underline{\qquad} = 3.$$

El número que completa la operación anterior debe a fuerza ser negativo. La razón primera de introducir a los negativos fue poder hacer restas como las siguientes:

1. $4-8$.
2. $2-5$.
3. $1-3$.

En todas estas el minuendo es menor que el sustraendo. En los números naturales, no existe una respuesta a estas operaciones. Todas ellas dan lugar a números negativos:

- $4-8 = -4$.
- $2-5 = -3$.
- $1-3 = -2$.

Ejercicio 5.

Resuelve las siguientes restas:

1. $2-6$.
2. $1-7$.
3. $4-10$.
4. $15-20$.
5. $14-17$.
6. $13-27$.
7. $6-14$.
8. $11-19$.
9. $15-8$.
10. $20-13$.
11. $13-20$.
12. $11-10$.

Como puedes observar, todo se reduce a saber comparar números naturales.

Pasemos a la suma. Podemos distinguir dos posibles casos:

Definición.

Caso I. Suma de números con el mismo signo. Se suman los valores absolutos y el resultado adquiere el mismo signo de los *sumandos*.

Ejemplo 8.

- $4 + 3 = 7$.
- $(-5) + (-3) = -8$.
- $15 + 4 = 19$.
- $-1 + (-2) = -3$.

Definición.

Caso II.Suma de números con distinto signo. Se restan los valores absolutos y el resultado adquiere el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo 9.

- $-3 + 7 = 4$.
- $4 + (-8) = -4$.
- $-13 + 10 = -3$
- $2 + (-1) = 1$

Ejercicio 6.

Resuelve las siguientes sumas:

1. $(-1) + (-1)$.
2. $-2 + 3$.
3. $5 + 8$.
4. $-3 + 2$.
5. $(-2) + (-2)$.
6. $-5 + 8$.
7. $-3 + (-2)$.
8. $-2 + 3$.
9. $4 + (-4)$.
10. $-9 + (-14)$.
11. $20 + (-30)) =$.
12. $-93 + (-1)$.

Nota

La resta de dos números puede definirse así:

$$a - b = a + (-b)$$

En otras palabras: Restar dos números a menos b equivale a sumarle a a el negativo de b.

Ejemplo 10.

- $4 - 2 = 4 + (-2) = 2$.
- $5 - 8 = 5 + (-8) = -3$.
- $-3 - 4 = -3 + (-4) = -7$.
- $-2 - (-1) = -2 + 1 = -1$.

Ejercicio 7.

Resuelve las siguientes restas:

1. $2 - 3$.
2. $-1 - 2$.
3. $-4 - (-5)$.
4. $15 - 9$.
5. $-5 - (-6)$.
6. $4 - (-1)$.
7. $8 - (-3)$.
8. $12 - 5$.

Ejemplo 11.

En ocasiones tendremos sumas y restas combinadas.

Un edificio tiene planta baja (PB),14 pisos hacia arriba y 5 pisos subterráneos. Armando se sube al elevador descompuesto y lo hace subir 5 pisos, luego bajar 3, sube 8 y baja 10. Después de eso sale del elevador. ¿En qué piso salió Armando?

Podemos representar esta situación con una suma – resta. La PB es el piso cero:

$$0 + 5 - 3 + 8 - 10$$

Una manera es ir haciendo las operaciones conforme van apareciendo: $0 + 5 = 5$, $5 - 3 = 2$, $2 + 8 = 10$, $10 - 10 = 0$

Así que Armando sale nuevamente en la planta baja.

Otra manera de hacerlo es agrupar los números positivos y negativos por separado:

$$0 + 5 - 3 + 8 - 10 = +5 + 8 - 3 - 10 = 13 - 13 = 0$$

Ejercicio 8.

Resuelve las siguientes sumas – restas de números enteros:

1. $-3 + 2 - 15 + 8 =$
2. $14 - 8 + 2 - 3 =$
3. $8 - 5 + 9 - 6 =$
4. $7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 =$
5. $-2 + 4 - 6 + 8 - 10 =$

Nota

Cuando tenemos una suma $-$ resta con paréntesis, es útil seguir la siguiente regla:

1. *Todo paréntesis precedido del signo "+" puede suprimirse sin alterar el signo del número que está entre paréntesis.*
2. *Todo paréntesis precedido del signo "$-$" puede suprimirse cambiando el signo del número que está dentro del paréntesis.*

Ejemplo 12.

Resolver la siguiente suma $-$ resta. $(-13) + (+14) + (-6) - (-1)$

*Solución:*Primero quitamos los paréntesis obedeciendo la regla anterior:

$$-13 + 14 - 6 + 1$$

Ahora agrupamos por separado positivos y negativos:

$$-13 - 6 + 14 + 1 = -19 + 15$$

Finalmente restamos los valores absolutos y conservamos el signo menos ya que 19 tiene mayor valor absoluto que 15.

$$-19 + 15 = -4$$

Ejercicio 9.

Resuelve las siguientes sumas $-$ restas de números enteros:

1. $-4 + (-3) - (-2)$
2. $5 + (-6) - (-7)$
3. $14 - (-1) + (-6)$
4. $8 + (-7) - (-6) + (-5) - (-4)$
5. $17 - (-3) + (-20) - (-3) - 4 + 1$

1.6. *Multiplicación de números enteros*

Definición.

En la *multiplicación* de números enteros se usa la famosa y nunca bien entendida *ley de los signos*:

1. $(+)x(+) = +$.
2. $(+)x(-) = -$.
3. $(-)(+) = -$.
4. $(-)(-) = +$.

Los números que se están *multiplicando* se llaman *factores* y el resultado se llama *producto*. Para multiplicar números con signo *basta multiplicar los valores absolutos y el signo del producto lo determina la ley de los signos*.

Es una costumbre prescindir del signo x para la multiplicación y escribir simplemente a los factores encerrados entre paréntesis pegados uno seguido del otro:

$$3x(-4) \text{ se escribe } (3)(-4).$$

Ejercicio 10.

Resuelve las siguientes multiplicaciones de números enteros.

1. $(-3)(-4)$.
2. $(-8)(5)$.
3. $(-10)(+2)$.
4. $8(-5)$.
5. $(2)(-3)$.
6. $(-2)(3)$.
7. $(-2)(-3)$.
8. $(+2)(3)$.
9. $(-5)(4)$.
10. $(5)(-4)$.
11. $(-5)(-4)$.
12. $(2)(-8)$.

Definición.

Cuando multiplicamos tres números abc podemos multiplicar primero a y b y el resultado multiplicarlo por c ó bien podemos multiplicar primero b y c, y el resultado multiplicarlo por a. En símbolos:

$$abc = (ab)c = a(bc)$$

.

Ejemplo 13.

- $(-2)(-3)(-4) = (6)(-4) = -24$.
- $(3)(-10)(-2) = (3)(20) = 60$.
- $(-1)(-1)(-1) = -1$.

Con cuatro o más números es la misma idea.

$$(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$$

Ejercicio 11.

Resuelve las siguientes multiplicaciones de números enteros.

1. $(-2)(-3)(-4)(-5)$.
2. $6(-7)(+2)$.
3. $(-2)(3)(-6)$.
4. $(3)(-5)(-2)(-1)$.
5. $(-2)(3)(-5)(2)$.
6. $(-12)(2)(-4)(-1)$.

1.7. *División de números enteros*

Definición.

La *división* es la única operación que no siempre se puede hacer en los números enteros. Por ejemplo la división 20 entre 8 da como resultado un número que no es entero.

Si a y b son dos números enteros, la *división* $a \div b$ es una operación que tiene por objeto encontrar un número c llamado *cociente* tal que c multiplicado por b dé como resultado a.

$$\text{Si } a \div b = c \text{ entonces } cb = a.$$

Nota que b no puede ser cero. ¿Por qué? Si fuera cero, tendríamos que encontrar un número que multiplicado por cero, dé como resultado el número a. Si a es un número distinto de cero, no existe el número buscado mientras que si es cero, cualquier número cumple lo dicho.
Por tal inconsistencia se excluye para siempre la división por cero. Para la división de números enteros se sigue también la siguiente regla:

1. $(+) \div (+) = +$.
2. $(+) \div (-) = -$.
3. $(-) \div (+) = -$.
4. $(-) \div (-) = +$.

Una división se puede representar de cualquiera de estas maneras:

$$a \div b \qquad a/b$$

Ejemplo 14.

- $20/(-2) = -10$
- $-15 \div 3 = -5$
- $-14/(-2) = 7$
- $-18 \div (-6) = 3$

Ejercicio 12.

Resuelve las siguientes divisiones.

1. $24/(-2) =$
2. $-25 \div 5 =$
3. $36/(-6) =$
4. $-24 \div (-8) =$

1.8. *Ejercicios y problemas*

1. Representa en la recta numérica: $5, -8, 10, -2, 0, 15, -9, 20, -1$ y 17.

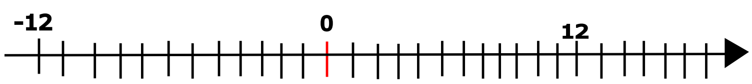

Figura 2: Recta numerica del problema 1.

2. Completa la tabla con el número o su simetrico según se pida.

número n	2	7		-4	-6		-12	-7519	
número $-n$	-2		-3			$+8$			$+978$

Tabla 1: Ejercicio 2.

3. Contesta.

a) $|19| =$.
b) $|-14| =$.
c) $|-16| =$.
d) $|765| =$.
e) $|-2.1| =$.
f) $|+2194| =$.
g) $-(+2) =$.
h) $-(-16) =$.
i) $-(+21) =$.
j) $-(-2) =$.

4. Representa las siguientes situaciones mediante una suma-resta de números con signo y encuentra los resultados.

a) Mi tío me regaló \$15, pague \$7 que debía; después me encontré un billete de \$10 y le regalé \$3 a mi hermana ¿cuánto dinero tengo actualmente?

b) En un experimento, la temperatura de un compuesto subió $2C$ en la primera hora: $4C$ más en la segunda y bajo $9C$ en la tercera. si la temperatura inicial era $2C$, ¿cuál es la temperatura después de la tercera hora?

5. Resuelve las operaciones.

a) $-3 + 7 =$.
b) $-5 + (-9) =$.
c) $8 + (-19) =$.
d) $-32 + (-15) =$.
e) $4 + (-6) =$.
f) $-24 + 19 =$.
g) $2 + 6 + (-14) =$.
h) $(-8) + 4 - 13 + (-20) =$.
i) $4 + (-3) + (-8) + 7 =$.
j) $4 - 6 =$.
k) $10 + 14 + 22 =$.
l) $17 - (-3) =$.
m) $-14 - (-18) =$.
n) $23 - 19 =$.
ñ) $-3 - 12 =$.
o) $-4 - 8 =$.
p) $-13 - 24 =$.
q) $19 - 23 =$.
r) $-15 - (-18) =$.
s) $16 - 28 =$.
t) $-13 - (-24) =$.
u) $-19 - (-23) =$.
v) $-3+7+(-9)+8+12+(-15)+1+(-7)+9+3 =$.
w) $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$.
x) $-5 + (-2) + 7 + (-1) + 8 + 10 =$.
y) $-6 + 8 - 4 - 5 + 12 =$.

6. Realiza las sumas.

a) $-7 + (-2) =$.
b) $-5 + (-2) + 3 =$.
c) $-11 + 8 =$.
d) $15 + (-10) =$.
e) $-1 + (-7) =$.
f) $-4 + (-1) + (-3) + 9 =$.
g) $31 + (-6) =$.
h) $9 + (-5) + 3 + 8 + (-7) =$.

7. Realiza las restas.

a) $6 - (-4) =$.
b) $(+9) - (+7) =$.
c) $(3) - (-9) =$.
d) $(+5) - (+5) =$.
e) $20 - (-12) =$.
f) $(25) - (+13) =$.
g) $(-7) - (+4) =$.
h) $(8) - (+3) =$.

8. Escribe en la línea el número que falta para que la operación esté correcta.

a) $43 + \_\_\_\_\_\_ = -3$.
b) $\_\_\_\_\_\_ + (-12) = -4$.
c) $5 + \_\_\_\_\_\_ = 3$.
d) $14 + \_\_\_\_\_\_ = -5$.
e) $-17 + \_\_\_\_\_\_ + = -11$.
f) $6 - \_\_\_\_\_\_ = 10$.
g) $\_\_\_\_\_\_ -10 = -7$.
h) $-2 - \_\_\_\_\_\_ = -6$.
i) $15 - \_\_\_\_\_\_ = -14$.

9. Resuelve las operaciones.

a) $(-9)(-4) =$.
b) $(4)(-5) =$.
c) $(-7)(+3) =$.
d) $(+7)/(-2) =$.
e) $(4)(-3)(-2) =$.
f) $(21)/(-3) =$.
g) $(-15)/(-5) =$.
h) $(2)(-2)(-2)(-2) =$.
i) $(-14)(-2)/(-7) =$.

10. Encuentra el resultado de las operaciones.

a) $(-3) + (-4) =$.
b) $(8) + (-13) =$.
c) $12 - (-3) =$.
d) $(-6) - (-2) =$.
e) $-12 - 6 =$.
f) $9 + (-14) =$.
g) $-15 + 9 + 2 =$.
h) $-10 - 4 + 6 - 1 =$.
i) $12 - 6 - 6 + 4 - 3 =$.
j) $-12 + 4 - 5 + 1 - 12 =$.
k) $-9 + 15 + 20 - 30 + 17 - 2 =$.
l) $(-4 + 5 - 10 - 7) - (5 + 4 - 2 + 10) =$.
m) $(-2)(-8) =$.
n) $(-6)(10) =$.
ñ) $(14)(-5) =$.
o) $(27)(3) =$.