Cimientos Matemáticos

Módulo 4: Expresiones algebraicas

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. MÓDULO 4: *EXPRESIONES ALGEBRAICAS*

1.1. *Uso de letras para representar números*

Definición.

Vamos a introducirnos en el uso del *lenguaje algebraico*. Este permite resolver problemas de una manera más general.
En cualquier tipo de lenguaje matemático es muy usual el empleo de *letras*. Aquí las letras *representarán números*. Tal vez nos preguntamos en un momento ¿Porqué representar números con letras, si ya lo hacemos con los mismos números?, la razón es porque las letras las usaremos para representar:

- *Números cualesquiera.*
- *Números desconocidos.*

Analicemos los ejemplos siguientes:

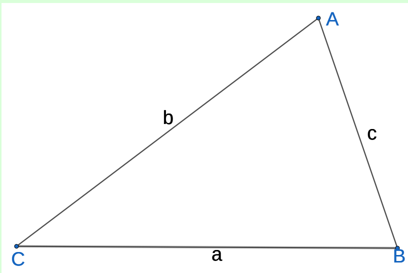
Ejemplo 1.

La suma de dos números cualesquiera puede representarse así:

$$a + b$$

Ejemplo 2.

En la figura siguiente puede hablarse del lado a , el ángulo B , lado c , ángulo A , etc. Las letras A, B y C pueden representar la medida de los ángulos internos.



Ejemplo 3.

La siguiente tabla tiene la relación entre el número de lápices n y el costo C correspondiente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
C	\$3	\$6	\$9	\$12	\$15	\$18	\$21	\$24	\$27	\$30	3n

Observa que podemos escribir una fórmula para calcular el precio de n lápices.

$$C = 3n$$

Por ejemplo, si $n = 7$, es decir, si el número de lápices es 7, entonces el costo C será:

$$C = 3 \times 7 = 21$$

Ejemplo 4.

La fórmula $A = bh$ expresa cómo calcular el área de un rectángulo si se conoce la medida de su base y su altura. A representa el área del rectángulo, b su base, y h su altura, de modo que la fórmula dice que: el área es igual al producto (multiplicación) de la base por la altura.

Ejemplo 5.

¿Cuál es el número que aumentado en 7 unidades resulta 20? Aquí tenemos un ejemplo de número desconocido, al cual representaremos con una letra, por ejemplo x :

$$x + 7 = 20$$

En este caso x no representa un número cualquiera sino más bien un número desconocido. Para encontrarlo debemos preguntarnos ¿cuál es el número tal que al sumarle 7 unidades resulta 20?

Ejemplo 6.

¿Cuál es el número que disminuido en 8, da como resultado 11? Llamemos y al número buscado, entonces tenemos que:

$$y - 8 = 11$$

En este caso se tiene que $y = 19$ es el único valor numérico que al restarle 8, da como resultado 11.

En éstos dos últimos ejemplos, las letras x y y representaban a números desconocidos, ya que no cualquier número, al restarle 8 resulta 11, o en el caso del ejemplo 5, si $x = 10$, por ejemplo, se tendría que $10 + 7 = 20$, lo cual es falso. En cambio en los primeros ejemplos, la literal puede tener un valor de un número cualquiera. En cualquier caso, para representar cantidades cualesquiera o desconocidas podríamos usar *cualquier* clase de símbolo o letra, **por ejemplo**:

- $n + 5 = 19$
- $b + 5 = 19$
- $\# + 5 = 19$
- $a + 5 = 19$
- $x + 5 = 19$

Definición.

Todas las expresiones anteriores representan la misma idea: encontrar un número que al sumarle 5 unidades resulte 19; y el único número que cumple esta condición es el 14, ya que $14 + 5 = 19$.

Cuando tenemos casos como los anteriores, en los cuales existe un número desconocido, al que llamamos incógnita, tenemos una *ecuación.*
Una ecuación es una igualdad, que está condicionada, es decir, una igualdad que es cierta únicamente para determinado o determinados valores de la cantidad o cantidades desconocidas (incógnitas).

veamos un ejemplo de lo antes mencionado.

Ejemplo 7.

- $3x = 15$ es una igualdad que solo es cierta cuando $x = 5$, es decir, cuando el valor de la x es 5. Ésta es una ecuación con una incógnita.
- $2x + 4 = 20$ es una ecuación, ya que la variable x debe tomar el valor de 8, para que sea cierta. Si $x = 8$, se tiene que $2(8) + 4 = 20$.

  Como habrás observado ya, en el lenguaje algebraico no es muy usual el signo $\times$ para la multiplicación. Cuando se indica el producto de dos factores literales como **por ejemplo**:
- a por b simplemente se escribe como ab y significa a multiplicado por b.
- $3m$ significa el producto 3 por m, 3 que multiplica a m.
- $m(x + y)$ significa m que multiplica a $x + y$.
- $(a - b)(x + h)$ significa que $(a - b)$ multiplica a $(x + h)$

Nota.

Los paréntesis son *signos de agrupación*, de modo que debemos considerar a la expresión entre paréntesis como un sólo número. También para la multiplicación emplearemos un *punto a media altura*, sobre todo para cuando se multiplican factores numéricos como: 3 por $4 = 3 \cdot 4 = (3)(4) = ...$

1.2. *Expresiones algebraicas*

Definición.

Una expresión algebraica es una combinación de números, letras que representan números y varias operaciones entre ellas.

Ejemplo 8.

- $n - 1$
- $4x$
- $2a + b$
- $\frac{a}{b}$
- $\frac{m+n}{3}$
- 1
- x^2
- $x^2 + 4x + 3$

Son expresiones algebraicas.

También podrían aparecer paréntesis, como por ejemplo en $2(n + 1)^2$

Definición.

*Termino Algebraico.*Los términos algebraicos son expresiones algebraicas que están separadas unas de otras por los signos + o −. Por ejemplo, la expresión $x^2 + 3x - 1$ tiene tres términos. Los elementos de un término son siempre factores o divisores, es decir, se están multiplicando o dividiendo. Por ejemplo:

Ejemplo 9.

- $3z$
- $\frac{x}{2}$
- $-5ab$
- $7x^2y^3$
- $\frac{ab}{2}$

son términos algebraicos.
En un término algebraico identificaremos lo siguiente:

$$5x^2y$$

Donde 5 es el coedición de es decir, el número que acompaña a la incógnita, la parte literal, que en este caso viende siendo x, y, y el número 2 que es el exponente de la literal x

Definición.

Coeficientes. Es el factor numérico, o literal, que va escrito a la izquierda, que indica el número de veces que se toma la parte literal como sumando. Si no está escrito, se entiende que es 1. Así, **por ejemplo**, en el término a el coeficiente es 1.

Ejemplo 10.

- $5x^2y$, significa $x^2y + x^2y + x^2y + x^2y + x^2y$
- $3a$, significa $a + a + a$
- $7(x + y)$, significa $(x + y) + (x + y) + (x + y) + (x + y) + (x + y) + (x + y) + (x + y)$
- $-4y$, significa $-y - y - y - y$
- nx, significa $x + x + x + x + x + x + x + ... + x$ (n veces)

Ejercicio 1.

Descomponer en sumandos iguales los siguientes términos algebraicos.

1. $3x^2$
2. $5xy$
3. $4x^2y^3$
4. $6m^2n$
5. $2x^3y^3z$
6. $2a^4b^2$
7. $4ab$
8. $-3a$
9. $2(a+b)$
10. $5ab^3$

Definición.

Parte literal. Son las literales que están a la derecha del coeficiente, con sus respectivos exponentes. Recordemos que son factores, es decir, $5x^2y$ significa $5 \cdot x^2 \cdot y$.

Definición.

Exponente. Es el número que se escribe como superíndice en la parte superior derecha de un número o literal que es llamado la base de la potencia. Una potencia es una operación que consta de base y exponente, por ejemplo 3^5 es una potencia, la base es 3 y el exponente es 5. El exponente nos indica el número de veces que se toma la base como factor, o sea, las veces que se multiplica la base por sí misma. Así, veamos los siguientes ejemplo.

Ejemplo 11.

- 3^5, significa $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, es la quinta potencia de 3.
- a^4, significa $a \cdot a \cdot a \cdot a$, la base es a y el exponente es 4.
- $5x^2y$, significa $5 \cdot x \cdot x \cdot y$, el exponente de x es 2 y el de y es 1.
- $4ab^3c^4$, significa $4 \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$
- $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a ... \cdot a$, se multiplica n veces.

Cuando el exponente no está escrito se sobreentiende que es 1.

Ejercicio 2.

Descomponer en factores iguales los siguientes términos algebraicos.

1. a^3
2. x^4
3. m^6
4. a^2b^3
5. x^3y^2
6. $2x^3y^4$
7. $4a^2b$
8. $3a^2b^3$
9. $2x^2y^4z^3$
10. $3a^3bc^2$

1.3. *Traducción de enunciados al lenguaje algebraico*

Veamos ahora algunos ejemplos de enunciados matemáticos que escribiremos algebraicamente.

Lenguaje Comun:	Lenguaje Albgebraico:
Un número cualquiera	a
La suma de dos números cualesquiera.	$a+b$
La diferencia de dos números cualesquiera.	$x-y$
El producto de dos números cualesquiera.	xy
El cociente de dos números cualesquiera.	p/q
La semisuma de dos números cualesquiera.	$(m+n)/2$
El triple de un número cualquiera.	$3n$
El doble de un número más su cubo.	$2x+x^3$
El cuadrado de la diferencia de dos números.	$(x-y)^2$

Ejercicio 3.

Traduce los siguientes enunciados al lenguaje algebraico.

- El cuadrado de la suma de dos números.
- El doble de un número.
- El cuadrado de un número.
- La mitad de un número cualquiera.
- El doble de un número más el triple de otro.
- La suma de los cuadrados de dos números.
- Las cuatro quintas partes de la suma de dos números.
- La quinta parte de un número dividida entre el doble de dicho número.

1.4. *Expresiones aritméticas. Jerarquía de operaciones*

Definición.

Cuando le damos valores a las letras de una expresión algebraica, esta se convierte en una *expresión aritmética.*

Se suele llamar expresión algebraica a una combinación de operaciones en la que intervienen letras cuyos valores no están fijos. En cambio expresión aritmética es una combinación de varias operaciones pero en la que todos los números son conocidos.

Para resolver una expresión aritmética conviene conocer *la jerarquía de las operaciones.*

1. Resolver potencias y raices.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Ejemplo 12.

En $4m^2$, si $m=3$, tenemos la expresión $4(3)^2$, que es una expresión aritmetica.

Ejemplo 1. ¿Cuanto vale $4(3)^2$?
*Solución.*Primero resolvemos la potencia y nos queda $4(9)=36$.

Ejemplo 2.¿Cuánto vale $2+3\times 5$?
*Solución.*Primero resolvemos la multiplicación y luego la suma. Nos queda: $2+3\times 5=2+15=17$

Ejemplo 13.

Ejemplo 3.¿Cuánto $4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4$?
*Solución.*Primero resolvemos la potencia y la raíz. Nos queda: $4-5\cdot(-3)^2+4 = 4-5\cdot 9+4 = 4-45+4 = -45$

Cuando aparecen paréntesis, debes tener en mente que toda la expresión que aparece entre paréntesis es considerada como un solo número: el número que se obtiene al resolver las operaciones. De modo que si aparecieran paréntesis, quizás haya que resolverlos primero. La práctica y el contexto de las operaciones que utilices te darán la pauta para saber qué se debe resolver primero.

Ejemplo 4. ¿ Cuanto vale $450 \div (5+10)^2 - 5^2 \times (2-3)$?
Solución. $450\div(5+10)^2-5^2\times(2-3) = 450\div 15^2-5^2\times(-1) = 450\div 225-25\times(-1) = 2-(-25) = 2+25 = 27$

Ejercicio 4.

Encuentra el valor de las siguientes expresiones aritméticas. Considera la jerarquía de las operaciones y los paréntesis.

1. $15 \div 5 + 10^2 - 5^2 \times 4 =$
2. $(3)(8) \div 4 \div 2$
3. $28 - [5 \times (9 \div 3)]$
4. $(6 + 4^3 + ((5-2) \div 2) \times 10) \div 8$
5. $\frac{4\times 3-2}{(4+8)-2}$
6. $\frac{1}{5} \div 40$

1.5. *Monomios y Polinomios*

Definición.

Polinomio. Se suele llamar polinomio a una expresión algebraica en la que intervienen sólo sumas, restas, multiplicaciones y potencias enteras. **Por ejemplo**:

- $2x + 7y$ es un polinomio con dos términos y con dos variables.
- $3x^2 + 2x - 8$ es un polinomio con tres términos y una sola variable.
- $2a + 4b - 7c + 9$ es un polinomio con cuatro términos y tres variables.

Definición.

Monomio. Es la expresión algebraica que consta de un solo término. **Por ejemplo**:

- $3x^2$
- $2x$
- $-7b$
- $\frac{1}{2}x$

Definición.

Binomios. Son polinomios que constan de dos términos. **Por ejemplo**:

- $2x - 6$
- $4a + 2b$
- $x^3 - 8$

Definición.

Trinomios. Son polinomios que constan de tres términos. Por ejemplo $4x^2 + 2x - 1$ es un trinomio.

El grado de un polinomio es el mayor exponente al que aparece elevada la variable. Por ejemplo:

- $4x^3 + 7x^2 - 7x + 3$ es un polinomio de tercer grado.
- $7x^2 + 4x + 2$ es un polinomio de segundo grado.
- $2y - 1$ es un polinomio de primer grado.

Si el polinomio tiene más de una variable, entonces tendremos que decir con respecto a cuál de ellas estamos hablando:

$2a^3b^2 + -8a^2b + 3$ es un polinomio de tercer grado con respecto a a, o bien de segundo grado respecto a b.

1.6. *Terminos semejantes*

Definición.

Dos o más términos se llaman *semejantes* , si tienen la misma parte literal, es decir, las mismas variables elevadas a los mismos exponentes. Así,

- $2x, 7x, -10x, 1/2x$ son términos semejantes.
- $2ab, -3ab, ab$ son términos semejantes.
- $2x^2y^3, 7x^3y^2$ no son términos semejantes.

Cuando dos o más términos son semejantes, los podemos combinar en uno solo sumando o restando, según sea el caso. Veamos algunos ejemplos:

- $2x + 3x = 5x$
- $7ab - 4ab = 3ab$
- $6a + 2b - 4a - 7b = 2a - 5b$
- $2xy - 7x^2y^3 + 8xy - 2x^2y^3 = 10xy - 9x^2y^3$

Ejercicio 5.

Determina cuántos términos tienen las siguientes expresiones y reduce términos semejantes.

1. $3a + 6a$
2. $14xy - 7xy$
3. $2b + 8c - 6b + b$
4. $4z + 7a + 2z - 8a$
5. $3a - (-7b) + 5a - 5b$
6. $3x - 2y + 8 - 7y - 2x$
7. $\frac{3}{5}x^2y + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{2}xy$
8. $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}xy + \frac{1}{2}xy$
9. $\frac{1}{3}m - \frac{2}{5}n + \frac{2}{3}m + \frac{7}{5}n$

Ejemplo 14.

Si tenemos una expresión con paréntesis, antes de reducirla suprimimos los paréntesis, teniendo en cuenta lo siguiente:

- Un paréntesis precedido del signo + puede suprimirse, sin alterar así el valor de la expresión. $(3x^2 - 4x - 1) + (2x^2 + 2x - 3) = 3x^2 - 4x - 1 + 2x^2 + 2x - 3 = 5x^2 - 2x - 4$
- Cuando se tiene un paréntesis precedido del signo $-$, puede suprimirse, pero tendrán que cambiarse los signos de cada uno de los términos que haya dentro del paréntesis. $(5a - 4b - 2c) - (3b - a + 7c) = 5a - 4b - 2c - 3b + a - 7c = 6a - 7b - 9c$

Nótese como $-(3b - a + 7c) = -3b + a - 7c$. Es decir, los tres términos que estaban agrupados dentro de paréntesis, al estar afectados por un signo menos, deben cambiar su signo, pues esto equivale a restar cada término por separado.

Ejemplo 15.

Observa qué ocurre al suprimir paréntesis.

- $7x + (4y - z) + (-2x + y - 3z) = 7x + 4y - z - 2x + y - 3z = 5x + 5y - 4z$
- $(8a^2b - 2ab^3 + 1) - (3 - 8a^2b + ab^3) = 8a^2b - 2ab^3 + 1 - 3 + 8a^2b - ab^3 = 16a^2b - 3ab^3 - 2$
- $4m - 3t - (1 + 2m) + (-t - 2) = 4m - 3t - 1 - 2m - t - 2 = 2m - 4t - 3$

Ejercicio 6.

Suprime paréntesis y reduce términos semejantes.

1. $-x + (-2x + x) =$
2. $-2a - (4a - a) =$
3. $m - n - (3m - n + 2) =$
4. $a - b - (-a - 2b) =$
5. $4r + 3t - (2r - 2t) - 3r =$
6. $-5xy + (-(2xy - xy) + (-x)) =$

1.7. *Solución de ecuaciones de primer grado*

Definición.

Ya hemos dicho que una ecuación es una igualdad condicionada para cierto o ciertos valores de la variable. A los valores que *satisfacen* o que cumplen la ecuación se les llama *soluciones*.

- $x + 3 = 11$, es una ecuación cuya solución es $x = 8$.
- $3x + 4 = 19$, se satisface cuando $x = 5$, pues $3(5) + 4 = 19$.

Estos son ejemplos de ecuaciones sencillas que podemos resolver en forma casi inmediata, basta preguntarnos ¿cuál es el número que sumado a 3 da 11?, o ¿qué número triplicado y sumándole 4 da 19? y no es difícil darnos cuenta que las respuestas son 8 y 5 respectivamente. Pero existen ecuaciones cuya solución no es tan "obvia" o que no es tan sencillo de ver. Tenemos entonces que tener un procedimiento sistemático para hallar la solución de una ecuación de éste tipo. Lo estudiaremos con más detalle en el módulo 5. Por ahora podemos decir que una ecuación consta de dos partes: el primer miembro y el segundo miembro. Éstos se encuentran separados entre sí por el signo =:

$$\text{Primer miembro} = \text{segundo miembro}$$

Resolver una ecuación significa hallar el valor de la variable que satisface la ecuación, es decir, que hace iguales a ambos miembros. En los ejemplos anteriores parece ser que "invertir" las operaciones es una buena idea:

Ejemplo 16.

- Para resolver $x + 3 = 8$, hay que restar $8 - 3$ para hallar $x = 5$.
- Para resolver $3x = 21$, basta dividir 21 entre 3 para ver que $x = 7$.

Definición.

Propiedades del despeje. Podemos concretar lo anterior diciendo que:

1. Si un término está sumando en un lado de la igualdad, puede pasar del otro lado restando.
2. Si un término está restando de un miembro de la igualdad, pasa al otro lado sumando.
3. Si un factor aparece multiplicando al un miembro de la ecuación, pasa a dividir al otro miembro.
4. Si un número aparece como divisor de un miembro de la igualdad, pasa a multiplicar al otro lado.

Ejercicio 7.

Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones.

1. $x + 12 = 6$
2. $y - 17 = 20$
3. $3x = 15$
4. $z/8 - 8 = -1$
5. $2x + 8 = 1$
6. $y/7 - 6 = -4$
7. $9 + x = 5$
8. $x - 10 = 15$
9. $x + 3 = 20$
10. $y + 18 = 26$
11. $0.5 + x = -1.5$
12. $3.4 - x = 2$
13. $\frac{2}{3} + y = \frac{4}{5}$
14. $y - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
15. $0.3 + y = 1$

1.8. *Ejercicios y problemas*

1. Observa con atención qué falta en cada uno de las siguientes tablas y completa.

   a) El triple de un número, mas uno.

x	$3x + 1$
8	25
12	
	22
11.25	
-2	

   b) El doble de un número, menos uno.

y	
2	3
	13
9	
10	19
	25

   c) La mitad de un número, mas el mismo número.

n	
20	
16	
14	
10	
5	

d) El ________________

m	m^2+2m
1	
2	
3	
5	
	8

e) El ________________

x	y	$2x-y$
-2	2	
-1	1	
0	0	
1	1	
2	2	

f) Cuatro ________________

a	$4a-a$
-1	
0	
1	
2	
3	

2. Encuentra el valor de las siguientes expresiones algebraicas sustituyendo los valores de las letras que se dan.

   a) $4x^2+y$, donde $x=1, x=2$
   b) $10p+20q$, donde $p=3, q=2$
   c) $\frac{8x-5y}{4x-3y}$, donde $x=2, y=0$
   d) $(3p+4)(5p-6)$, donde$p=1$
   e) $(2z+w)(w^2+4)$, donde $w=3, z=0$
   f) a^a, donde $a=3$
   g) x^3+x^2-5x-6, donde $x=4$

3. Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones.

   a) $x-7=38$
   b) $a-16=40$
   c) $z+21=73$
   d) $m+24.7=37.9$
   e) $2x=4$
   f) $5x=75$
   g) $7x=98$
   h) $6x=90$
   i) $10x+5=50$
   j) $6x-5=55$
   k) $6a-9=21$
   l) $\frac{p}{5}=12$

4. Plantea una ecuación para cada uno de los siguientes problemas y resuélvelos.

   a) Cinco paquetes iguales de chocolates hacen un total de 30 piezas, ¿cuántas piezas tiene cada paquete?
   b) Si al triple de un número se le resta 7, se obtiene 17. ¿Cuál es el número?
   c) Si Gaby duplica su dinero y paga $70 que debe, le quedan $90 ¿cuánto tiene?

5. Completa el cuadro.

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Común
$m - n$	
	La mitad de un número cualquiera
a/c	
	El cudo de un número cualquier, más 7
$3x$	
	El doble de la suma de tes números

6. Simplifica las siguientes expresiones.

   a) $m + m =$
   b) $z + z + z + z+ =$
   c) $b \cdot b \cdot b$
   d) $g + g =$
   e) $h \cdot h \cdot h \cdot h \cdot h =$
   f) $a + a + a + a =$

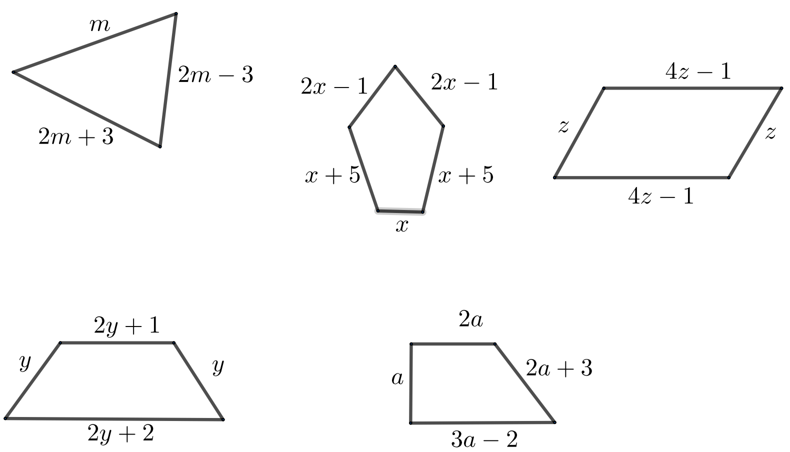
7. Indica coeficiente y parte literal de cada una de las siguientes expresiones.

   a) 1.7
   b) $-\frac{1}{3}x$
   c) yz^3
   d) $4n$
   e) $5x^2y$
   f) $-7x$

8. Indica cuál es la base y cual el exponente de cada potencia en las siguientes expresiones.

   a) $6m^3$ Coeficiente:______ Base:______ exponente:______
   b) $\frac{7}{9}b^6$ Coeficiente:______ Base:______ exponente:______
   c) $\frac{1}{3}x^3$ Coeficiente:______ Base:______ exponente:______
   d) x^2 Coeficiente:______ Base:______ exponente:______
   e) $2x^2$ Coeficiente:______ Base:______ exponente:______

9. Expresa en forma sencilla el perímetro de las siguientes figuras.



10. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x + 9x + 7 =$

b) $2a^3 + a^3 - 4b^2 + a^3 =$

c) $rs - rs + rs =$

d) $6y^4 + y^4 + y^4$

e) $\frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2y =$