Cimientos Matemáticos

Módulo 6: Monomios y polinomios

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. *MÓDULO 6: MONOMIOS Y POLINOMIOS*

Definición.

Vamos a estudiar operaciones con *monomios* y *polinomios*. Consideremos las siguientes expresiones:

$$2x + y, \qquad x^2 - 2x + 1, \qquad x^3$$

La primera expresión tiene dos términos, la segunda tiene tres y la tercera consta solamente de uno. Los prefijos *poli* y *mono* significan, respectivamente, *varios* y *uno*. Entonces polinomio es una expresión que tiene dos o más términos. Mientras que monomio es una expresión algebraica que consta sólo de un término.

En los *monomios* y *polinomios* se suelen usar las variables x, y, z, w, etcétera. Casi siempre las últimas letras del alfabeto. Si hicieran falta más variables a veces se suele escribir x_1, x_2, x_3, etc.

Cada *monomio* o *polinomio* puede tener asociado un **valor numérico**, que es el número que resulta luego de darle valores específicos a las variables, sustituir y realizar las operaciones. Consideremos el siguiente polinomio $2x + y$, digamos que $x = 5$, $y = 8$, entonces el valor numérico será $2(5) + 8 = 10 + 8 = 18$.
Si ahora $x = -1, y = 4$ el valor numérico es: $2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$.Consideremos ahora el polinomio $x^2 + 1$. Si $x = -3$, el valor numérico será: $(-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.

1.1. *Leyes de los exponentes*

Definición.

¿Qué es una potencia?
La *potencia* o *potenciación* es considerada la quinta operación aritmética y consta de dos elementos: *base*, en este ejemplo la base viene siendo a y *exponente* que es n.
Lo que indica esta operación es que la base se debe multiplicar por sí misma tantas veces como indique el exponente. Así,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$$

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
- $x^8 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
- $(x + 2)^3 = (x + 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

Cuando un número no tiene escrito ningún exponente, entendemos que éste es 1.

Definición.

Leyes de los signos en las potencias.

- Observa que cuando un número NEGATIVO se eleva a un exponente PAR, el resultado será POSITIVO.
  - $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$
  - $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
- Pero cuando un número NEGATIVO se eleva a un exponente IMPAR, el resultado será siendo NEGATIVO.
  - $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
- Si la base es un número POSITIVO, elevada a un exponente par o impar, el resultado sigue siendo POSITIVO.

Definición.

Exponentes importantes.
Hay algunas propiedades de los exponentes que debemos tomar en cuenta:

1. *Cualquier número elevado al exponente 1, queda igual.* Es decir,
$$a^1 = a$$
2. *Cualquier número (diferente de cero) elevado al exponente 0, es igual a 1.*
$$a^0 = 1$$
3. Si un número (diferente de cero) se eleva a un exponente negativo, se escribe como uno dividido entre la misma potencia pero positiva.
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 1.

- $3^1 = 3$
- $100^1 = 100$
- $123456789^0 = 1$
- $(2x+3)^0 = 1$
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{1024}$

Ejercicio 1.

Desarrolla y calcula las siguientes potencias.

1. $45^1 =$
2. $15^2 =$
3. $7^3 =$
4. $2021^0 =$
5. 2^{-1}
6. $(-3)^6 =$
7. $(-2)^5 =$
8. $(-2)^6 =$

Ejercicio 2.

Desarrolla las siguientes potencias.

1. $a^7 =$
2. $(a-2)^4 =$
3. $(3x)^6 =$
4. $(-2+y)^2 =$

Además de esas tres propiedades, tenemos otras 5 leyes de los exponentes, que nos sirven para saber cómo hacer las operaciones con ellos.

Definición.

LEYES DE LOS EXPONENTES

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ siempre que a sea distinto de cero
5. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

A continuación ponemos tres ejemplos de cada una de las leyes de los exponentes, obsérvalos con cuidado y entiéndelos.

Ejemplo 2.

- $x^3 \cdot x^4 = x^{4+3} = x^7$.
- $a^2 \cdot a^5 \cdot a^{-3} = a^{2+5-3} = a^4$.
- $x^{-4} \cdot x^{-3} = x^{-4+(-3)} = x^{-7} = \frac{1}{x^10}$.
- $(a^4)^3 = a^{4x3} = a^{12}$.
- $(b^3)^{-2} = b^{3x-2} = b^{-6}$.
- $(a^{-8})^{-2} = a^{-8x-2} = a^{16}$.
- $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$.
- $(2xy)^3 = 2^3x^3y^3 = 8x^3y^3$.
- $(3x^3y^2z)^2 = 3^2(x^3)^2(y^2)^2z^2 = 9x^6y^4z^2$.
- $\frac{x^8}{x^5} = x^{8-5} = x^3$.
- $\frac{z^4}{z^6} = \frac{1}{z^2}$.
- $\frac{a^{-3}}{a^4} = a^{-3-4} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$.
- $(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$.
- $(\frac{2x}{y})^3 = \frac{2^3x^3}{y^3} = \frac{8x^3}{y^3}$.
- $\left(\frac{3x^2y}{xy}\right)^2 = \frac{9x^4y^2}{x^2y^2} = 9x^2$.

Ejercicio 3.

Simplifica las siguientes expresiones utilizando las leyes de los exponentes. Indicar en cada caso cuál o cuáles leyes de exponentes se están usando.

1. $z^2 \cdot z^3 =$.
2. $m^2 \cdot m^4 \cdot m^{-1} =$.
3. $(x+3)^4 \cdot (x+3)^6 =$.
4. $(b^2)^3 =$.
5. $(x^4)^{-3} =$.
6. $(y^{-1})^{-5} =$.
7. $(3b)^3 =$.
8. $(-5ab)^4 =$.
9. $(2m^4n^3p^2)^3 =$.
10. $\frac{a^7}{a^3} =$.
11. $\frac{w^2}{w^4} =$.
12. $(\frac{3c}{a})^4 =$.
13. $(\frac{4b^4c^2}{b^3c})^3 =$.

1.2. *Multiplicación de monomios*

Definición.

Para multiplicar monomios se procede como sigue:

Por ejemplo si tenemos $(2x)(3y)$ se *multiplican los coeficientes*, es decir $2 \times 3 = 6$ y luego se *multiplican las literales* $x \times y = xy$. De modo que entonces $(2x)(3y) = 6xy$.

Aquí se puede aplicar la ley A de los exponentes, o sea, sumar los exponentes de una misma base cuando se multiplican.

Ejemplo 3.

Analicemos más ejemplos variados.

- $(-4ab)(5c) = -20abc$
- $(2x)(4x) = 8x^2$
- $(-5x^2y)(3x^3y^2) = -15x^5y^3$
- $(-2xy)(3y^2)(4x) = -24x^2y^3$
- $\left(\frac{2}{3}x^4\right)\left(\frac{1}{4}xy\right) = \frac{1}{5}x^5y$

Ejercicio 4.

Multiplica los monomios.

1. $(4x)(2x) =$
2. $(-3a)(4b) =$
3. $(-3a2)(ab) =$
4. $(2x^2y)(-3xy) =$
5. $(7x^yz)(3xz^2) =$
6. $(8x^2yz)(-6xy^2) =$
7. $(1/2mpq^2)(6q) =$
8. $(13h^2jk)(5h)(-2k) =$
9. $(x^ny)(x^my) =$

1.3. *Multiplicación de monomio por polinomio*

Definición.

Vamos a recordar la *propiedad distributiva* de la multiplicación y la suma. Esta nos dice que para cualesquiera números a, byc se cumple que:

$$a(b+c) = ab + ac$$

En otras palabras, si un número a se multiplica por una suma de números $b + c$ el resultado puede obtenerse multiplicando a por cada uno de los sumandos byc, y luego sumando los resultados. Como la multiplicación es conmutativa, es decir, el orden no importa, la propiedad distributiva también puede escribirse así:

$$(b+c)a = ab + ac$$

Podemos comprobar esta propiedad de los números haciendo alguna multiplicación como por ejemplo $12x23$ y reescribiendo como $(10+2)x23 = 10x23 + 2x23 = 230 + 46 = 276$.

Ejemplo 4.

Para lo que usaremos ahora esta propiedad tan importante es para aprender a multiplicar monomios y polinomios. Veamos algunos ejemplos:

- $2x(x+2) = 2xx + 2x \cdot 2 = 2x^2 + 4x$.
- $x^6(x^2 - x) = x^6 \cdot x^2 - x^6 \cdot x = x^8 - x^7$.
- $x^3(2x + xy - 1) = x^3 \cdot 2x + x^3 \cdot xy - x^3 \cdot 1 = 2x^4 + x^4y - x^3$.
- $45ab^2(-a - b - c + 4) = -45a^2b^2 - -45ab^3 - 45ab^2c + 180ab^2$

Como puedes observar, primero se aplica la propiedad distributiva y luego usamos las leyes de los exponentes que aprendimos en una sección anterior. Veamos otros ejemplos que involucren también resta y más de dos términos.

Ejercicio 5.

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

1. $a(a-b) =$.
2. $1/2xy(4x - 3y) =$.
3. $-6x(x^2 - 3) =$.
4. $4p(x - h) =$.
5. $-5x^2(2x^4 - 4xy + 2) =$.
6. $(-9ax^2)(2ay - 5ab + 4) =$.
7. $(2x^2y)(-4x^3 - 5xy + 2) =$.
8. $(-3a)(x^2 - y^2) =$.
9. $(a^2b - 1)(3b) =$.
10. $2x(-4x + y - 1) =$.
11. $\frac{3}{2}x(6x - \frac{2}{5})$.
12. $\frac{-4}{9}x(3x + z)$.
13. $(8x^2)(\frac{2}{8}y + \frac{9}{4}xy - 1)$.
14. $(12m)(-4q + \frac{5}{3}a + \frac{1}{3})$.
15. $(-11cd^2 + 4c^3)(-3cd) =$.
16. $4x^3y^2(5xy^2 + 4x^2y) =$.

1.4. *Multiplicación de polinomio por polinomio*

Definición.

Hemos visto ya la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, nos dice que si a, c y d son números cualesquiera, entonces

$$a(c+d) = ac + ad$$

Si en lugar del número a tenemos una suma de números $a+b$, tenemos la multiplicación:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (ab)d$$

Ahora podemos volver a usar la ley distributiva en $(a+b)c$ y $(a+b)d$, quedándonos lo siguiente:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd$$

El orden en que se escriban los sumandos no altera el resultado, de modo que se podría escribir $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

En conclusión: hemos multiplicado cada uno de los términos del primer factor, a y b por cada uno de los términos del segundo factor, c y d.

Si ahora tuviésemos una multiplicación del tipo:

$$(a+b)(c+d+e),$$

procederíamos exactamente igual: multiplicando cada uno de los términos del primer factor por cada uno de los tres términos del segundo factor, de modo que

$$(a+b)(c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Observa que ahora el resultado consta de seis términos.

Ejemplo 5.

Usando esta idea veamos algunos ejemplos de multiplicación de polinomios.

- $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$ Nos quedaron cuatro términos, pero dos de ellos son semejantes. Al reducirlos nos quedan sólo tres términos.
- $(x+y)(x^2 - 3xy + y^2) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + x^2y - 3xy^2 + y^3 = x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3$ Nos quedaron ahora seis términos, pero reduciendo términos semejantes nos quedan sólo cuatro.

  No siempre van a quedar términos semejantes, pero cuando sí, hay que reducirlos.

Ejercicio 6.

Multiplica los polinomios y reduce (si es el caso) términos semejantes.

1. $(a+b)(a-b) =$
2. $(a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$
3. $(x+y)(x+y) =$
4. $(z+5)(z+3) =$
5. $(a-3)(a-8) =$
6. $(a-2b)(a+2b) =$
7. $(3x^2+7)(2x+5) =$
8. $(6a^2+3)(3a-2) =$
9. $(2a-b)(a+b) =$
10. $(p^2+q^2)(p^2-q^2) =$

1.5. *Productos notables*

Definición.

a. Producto de binomios con un término común.
Se acostumbra llamar *productos notables* a algunas multiplicaciones especiales. Por ejemplo:

$$(x+3)(x+2) = \qquad (y+5)(y+4) = \qquad (z-1)(z+6) =$$

En estos casos aparece un *término común*. Si las efectuamos nos queda:

$(x+3)(x+2) = x^2 + \underline{2x} + \underline{3x} + 6 = x^2 + \underline{5x} + 6$

$(y+5)(y+4) = y^2 + \underline{4y} + \underline{5y} + 20 = y^2 + \underline{9y} + 20$

$(z-1)(z+6) = z^2 + \underline{6z} - \underline{z} - 6 = z^2 + \underline{5z} - 6$

Observando cuidadosamente, sale una *receta* para efectuar este tipo de productos, y es la siguiente:

1. Se eleva al cuadrado el término común.
2. Se suman los términos no comunes y esta suma se multiplica por el término común.
3. Se multiplican los términos no comunes.

En forma resumida, se puede escribir lo siguiente:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejercicio 7.

Calcula los siguientes productos.

1. $(x-1)(x+3)$
2. $(x-8)(x-3)$
3. $(a+2)(a-7)$
4. $(a+6)(a-6)$
5. $(5+y)(6+y)$
6. $(u+12)(u-18)$
7. $(a+4)(a+6)$
8. $(x+13)(x-12)$
9. $(x+6)(x-5)$
10. $(x+10)(x-12)$

Definición.

b. Cuadrado de un binomio.

En este caso, más que tener un término en común, vemos que los dos términos son comunes, pues se trata de un mismo binomio multiplicado por sí mismo. Veamos algunos ejemplos:

- $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2 + \underline{2x} + \underline{2x} + 4 = x^2 + \underline{4x} + 4$
- $(y-1)^2 = (y-1)(y-1) = y^2 - \underline{y} - \underline{y} + 1 = y^2 - \underline{2y} + 1$

No hace falta hacer demasiados ejemplos para darnos cuenta del patrón que se tiene en este caso:

1. Primero se eleva al cuadrado el primer término.
2. Se suma el doble producto del primer término por el segundo término.
3. Se suma el cuadrado del segundo término.

En símbolos algebraicos tenemos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
El resultado se conoce con el nombre de *trinomio cuadrado perfecto*. Hay que tener cuidado con los signos: el primero y último términos siempre quedan positivos, al ser el cuadrado de un número y todo número al cuadrado resulta un número positivo. En cambio el término de en medio ($2ab$) puede bien quedar negativo o positivo, dependiendo de los signos de a y b.

Ejercicio 8.

Calcula los siguientes binomios al cuadrado.

1. $(a+7)^2$.
2. $(7a+2b)^2$.
3. $(5a+2ab)^2$.
4. $(ax+ay)^2$.
5. $(3a+1)^2$.
6. $(x^2+2xy)^2$.
7. $(10a^2+b^2)^2$.
8. $(1/2+2a)^2$.
9. $(x^3+y^3)^2$.
10. $(0.2x-5y)^2$.

Definición.

c. Producto de binomios conjugados.

Se le llama *binomios conjugados* a dos binomios como $(a+b)$ y $(a-b)$. Como has visto, al multiplicarlos, queda lo siguiente:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

.
Se te deja como ejercicio justificar por qué en este caso el resultado es otro binomio y no un trinomio como pasó en los dos casos anteriores.

Ejercicio 9.

Calcula los productos dados.

1. $(x+2)(x-2)$
2. $(x-3y)(x+3y)$
3. $(2a-1)(2a+1)$
4. $(3x-2)(3x+2)$
5. $(3x-2y)(3x+2y)$
6. $(-2+x)(2+x)$
7. $(a^2-b)(a^2+b)$
8. $(m^2+n)(m^2-n)$
9. $(3x^2y-1)(3x^2y+1)$
10. $(2a^2+7)(-2a^2+7)$

1.6. *Factorización*

Como vimos en el módulo 1 con los números naturales, *factorizar* es escribir un número como una multiplicación. En general no es fácil: encontrar los dos (o más) factores cuyo producto resulte el número original. Aquí vamos a estudiar factorización de polinomios, problema que suele ser igual de difícil que el de factorizar números naturales. Vamos a ver varios casos:

Definición.

d. Extracción de un Factor común.

Este caso es prácticamente utilizar la propiedad distributiva:

$$ax+bx-cx=x(a+b-c)$$

Por ejemplo, si nos piden factorizar $24m^3n^3-12m^3n^2+30mn^2$.

Tenemos que buscar un factor común, es decir, un monomio que divida a los tres términos que aparecen allí, y de preferencia que sea el máximo factor común.

Definición cont.

Nota que 6 es un divisor de 24, 12 y 30, y además es el máximo común divisor. Así que el coeficiente de nuestro factor común será 6. Ahora, para las literales debemos proceder con cuidado. Primero que nada, la m sí aparece en los tres términos, así que nos fijamos en la menor potencia que aparece: m. La variable n también aparece en los tres términos, y la menor potencia que aparece es 2, es decir n^2 .Nuestro factor común será entonces $6mn^2$. Escribimos ese monomio y abrimos a su derecha un paréntesis con tres espacios.

$$6mn^2(\underline{\qquad} \quad \underline{\qquad} \quad \underline{\qquad}) =$$

En esos tres espacios deberán aparecer los términos que multiplicados por $6mn^22$ nos den el polinomio original $24m^3n^3 - 12m^3n^2 + 30mn^2$.

$$6mn^22(\underline{4m^2n} - \underline{2m^2} + 5) = 24m^3n^3 - 12m^3n^2 + 30mn^2$$

Así que: $24m^3n^3 - 12m^3n^2 + 30mn^2$ se factoriza como $6mn^2(4m^2n - 3m^2 + 5)$.

Ejercicio 10.

Factoriza los siguientes polinomios extrayendo un factor común.

1. $3ax^2 + 3bxy$
2. $6a^3b - 2ab^3$
3. $20x^5 - 12x^2$
4. $ax^3 - a^3x$
5. $7x^3 - 7x$
6. $3x^4y + 2x^3y + x^2y$
7. $3x^{10} + 2x^9 - 5x^8 - x^7$
8. $11x^6 + 55x^4 - 22x^2$
9. $20x^6y^4 + 35x^5y^3 + 10x^4y^4 - 30x^5y^5$
10. $14x^2 - 2x - 21x^3$

Definición.

e. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En la sección a. aprendiste cómo multiplicar binomios con un término común. Bueno, aquí tenemos ahora el proceso inverso. Básicamente nos darán un trinomio y tendremos que encontrar cuáles son los factores que multiplicados nos dan ese trinomio. Analizando con cuidado la regla aprendida en la sección a. tenemos que:

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q); \qquad donde \qquad p + q = b; pq = c$$

Por ejemplo, supongamos que queremos factorizar el trinomio $x^2 + 9x + 20$. Primero abrimos dos paréntesis cada uno conteniendo una x, que es el término que deberá ser común (pues es el que aparece elevado al cuadrado).

$$(x\underline{\qquad})(x\underline{\qquad})$$

Luego buscamos dos números que sumados den 9 y multiplicados den 20. Esos números son 4 y 5. Esos serán los términos no comunes, así que nos queda:

$x^2 + 9x + 20$ Trinomio dado. $\Longrightarrow$ $(x + 4)(x + 5)$ Factorizando

Nota: Claro que los números podrían ser negativos.

Otra Nota: No siempre existen estos números, al menos no enteros o fracciones. Los ejercicios que se proponen aquí han sido escogidos de manera que en la mayoría de los casos existan tales números.

Ejercicio 11.

Factoriza los siguientes trinomios.

1. $x^2 + 2x - 15$
2. $x^2 + 9x + 14$
3. $x^2 + x - 6$
4. $x^2 + 8x - 9$
5. $x^2 + 10x + 24$
6. $a^2 + 15a + 54$
7. $a^2 + 2a - 15$
8. $x^2 + x - 30$
9. $x^2 - 15x - 54$
10. $b^2 + 21b + 110$

Definición.

f. Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Buscamos dos números p y q tales que: $p + q = b; pq = ac$, y escribimos:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + px + qx + c$$

después habrá que extraer factor común de los primeros dos términos $ax^2 + px$, y hacerlo también para $qx + c$, quedando un binomio factor común que se puede extraer por agrupación.

Por ejemplo, supongamos que nos piden factorizar $3x^2 - 5x + 2$.

Primero buscamos dos números que multiplicados nos den lo mismo que el producto de 3 por 2 (el primero y último coeficiente), pero que sumados nos den -5 (el coeficiente de en medio). Esos números son -3 y -2. Luego tenemos:

$3x^2 - 5x + 2$	Polinomio dado
$3x^2 - 3x - 2x + 2$	escribimos $-5x$ como $-3x - 2x$
$(3x^2 - 3x) - (2x - 2)$	Agrupamos
$3x(x - 1) - 2(x - 1)$	Sacando factor común
$(x - 1)(3x - 2)$	Factorizamos $(x - 1)$

Ejercicio 12.

1. $2x^2 + 5x + 3$
2. $2x^2 + 17x + 21$
3. $2x^2 + 7x + 3$
4. $3x^2 + 17x + 10$
5. $2x^2 + 5x - 7$

Definición.

g. Factorización de trinomios cuadrados perfectos. (TCP's)

Recordemos que un *trinomio* es llamado *trinomio cuadrado perfecto* cuando es el resultado de elevar un binomio $a + b$ al cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De modo que, la estructura de este trinomio se puede reconocer del modo siguiente:

1. El primero y último términos deben ser cuadrados perfectos, es decir, se deben poder obtener de elevar al cuadrado un monomio.
2. El término de en medio debería ser el doble producto de los monomios que al ser elevados al cuadrado resultan el primero y tercer términos.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 6.

Queremos reconocer si el trinomio $x^2 - 4x + 4$ es o no es un TCP. El primero y tercer término son: x^2 y 4. Estos son, claramente, cuadrados perfectos, pues x^2 es el resultado de elevar x al cuadrado y 4 es el resultado de elevar 2 al cuadrado.

Además el término de en medio, -4x resulta ser precisamente el doble producto de x y 2: $2(x)(2) = 4x$.

Una vez que sabemos que se trata de un TCP, lo podemos escribir como:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Nota: El signo del término de en medio determina si va a ser una suma o una resta, elevada al cuadrado. En este ejemplo, el término de en medio fue negativo, por lo tanto nos quedó una resta: $x - 2$.

Ejercicio 13.

Factoriza los siguientes trinomios, que son cuadrados perfectos.

1. $x^2 + 2ax + a^2$
2. $x^2 + 4xy + y^2$
3. $x^2 + 14xy + 49y^2$
4. $16 - 24a + 9a^2$
5. $a^2 + 6ax + 9x^2$
6. $36 - 60x + 25x^2$
7. $25a^2 - 30ab + 9b^2$
8. $a^2x^2 + 2axy + y^2$

Definición.

h. Factorización de diferencias de cuadrados.

Una diferencia de cuadrados es una expresión de la forma $a^2 - b^2$. Como recordarás de la sección c. éstas se obtienen de multiplicar dos binomios conjugados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Factorizar una diferencia de cuadrados es muy sencillo: simplemente se buscan los monomios que al cuadrado nos dan los términos de la diferencia de cuadrado y se escribe el producto de binomios conjugados.

Ejemplo 7.

Por ejemplo, factorizar $16x^2 - c^2$. Los monomios que al cuadrado nos dan $16x^2$ y c^2 son, respectivamente, 4x y c. Así que escribimos:

$16x^2 - c^2 = (4x + c)(4x - c)$.

Ejercicio 14.

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

1. $9x^2 - 1$
2. $100b^2x^2 - c^2$
3. $36a^2b^2 - 9$
4. $a^2 - \frac{4}{9}$
5. $16x^4 - 1$
6. $9a^2 - 169$
7. $144x^4 - 1$
8. $25a^2 - 16$

1.7. *Ecuaciones cuadráticas*

¿Cuál es el número que multiplicado por 3 y luego sumándole 2 da como resultado 11? Como quizás recuerdes, este enunciado da lugar a una *ecuación de primer grado*, que es:

$$3x + 2 = 11$$

Estudiamos cómo resolver estas ecuaciones en el módulo 5. Se llaman ecuaciones de primer grado porque la mayor potencia a la que aparece elevada x es la primera potencia.

¿Cuál es el número que elevado al cuadrado y luego sumándole 1 da como resultado 10?

La pregunta anterior se puede expresar por medio de una ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 1 = 10$$

En este capítulo estudiaremos cómo resolver este tipo de ecuaciones. Ésta en particular es muy sencilla: basta restar 1 en ambos lados de la igualdad:

$$x2 + 1 + (-1) = 10 + (-1) \implies x^2 = 9$$

Luego nos preguntamos: ¿cuál es el número que elevado al cuadrado resulta 9? Claramente x = 3 es una posible solución, pero ¿es la única? ¡No! En este caso existen dos posibles soluciones: $x = -3$ es otro número que elevado al cuadrado resulta 9, pues:

$$(-3)2 = (-3)(-3) = 9$$

Podemos escribir: Si $x^2 = 9$, entonces despejando x se obtiene $x = + - 9$

Ésto simplemente indica que en este caso, la x admite dos posibles valores: la raíz cuadrada de 9, que es 3, y el negativo de la raíz cuadrada de 9, es decir, -3.

$$\text{Si } x^2 = 9, \text{ entonces } x = 3 \text{ o } x = -3$$

Ejercicio 15.

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones. Indica en cada caso si se trata de una ecuación de primer o de segundo grado.

1. $x + 5 = 19$
2. $x^2 = 25$
3. $2x - 1 = -15$
4. $2x^2 = 200$
5. $x^2 + 1 = 26$

Definición.

Una ecuación de segundo grado también se llama *ecuación cuadrática*. Como habrás observado, una *ecuación cuadrática* tiene dos soluciones. Esto ocurre siempre y lo que haremos es entender algunas técnicas para encontrar todas las soluciones, si las hay. Habrá algunos casos donde no exista solución, por ejemplo la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Esta es en realidad una ecuación controversialmente famosa, pues al no tener solución (no existe ningún número que elevado al cuadrado de -1), históricamente dio lugar a la invención de una nueva clase de números: *los números complejos* que no estudiaremos aquí, pero que comentaremos brevemente en la parte 3 de éste libro: *Pre cálculo*. Lo que sí veremos aquí es cómo identificar en general cuándo una ecuación cuadrática tiene o no solución.

Éstas ecuaciones del ejercicio 1 son sencillas, pero considera la siguiente ecuación:

Ejemplo 8.

Resolver la ecuación $x^2 + 6 = 5x$

Solución. Si intentamos aplicar solamente las propiedades del despeje y las propiedades de la igualdad que hemos usado para las ecuaciones de primer grado, veremos que no es posible despejar a la x. Esto se debe a que tenemos dos tipos de términos: un término en x, y un término en x^2 . Como no son semejantes, no se pueden sumar y eso complica las cosas.

En vez de eso, pasaremos el $5x$ al lado izquierdo de la igualdad:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Luego podemos factorizar:

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

Y usaremos una propiedad de los números: Si sabes que el producto de dos números ab es igual a cero, entonces uno de ellos debe valer cero: Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Aplicando esta propiedad, concluimos que:

$$x - 2 = 0, \qquad x - 3 = 0$$

De donde obtenemos las dos posibles soluciones: $x = 2$ o $x = 3$

Se acostumbra en las ecuaciones cuadráticas, que al resolverlas numeramos a las dos soluciones usando un subíndice: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Puedes comprobar que al sustituir 2 o 3 en la ecuación original, se verifica la igualdad.

A esto se le llama resolver una *ecuación cuadrática por factorización.*

Ejercicio 16.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización. Comprueba las soluciones.

1. $x^2 - 4x + 3 =$.
2. $x^2 + x - 6 = 0$.
3. $x^2 + 2x - 35 = 0$.
4. $x^2 - 1 = 0$.
5. $x^2 + 4 = 4x$.

1.8. *Ejercicios y problemas*

1. Elimina los paréntesis y reduce términos semejantes. Cuando se tienen agrupaciones dentro de otras, conviene eliminar primero los paréntesis interiores, es decir, de adentro hacia fuera y al final reducir términos semejantes.

   a) $x - (2y + 3x) - 2y$
   b) $3x - (2y - 4x) + 6y$
   c) $(2x - 3y) + (y - 4w) - (w - 3x)$
   d) $3x - [2x + 3y - (2y - 3x)] + 4y$
   e) $9x - (2y - 3x) - [y - (2y - x)] - [2y + (4x - 3y)]$
   f) $(-2x^3 + 7x^2 - x) + (4x^3 - 8x^2 + x - 6)$
   g) $[(2a - b) + (2a - c)] + (-4a + b + c)$
   h) $4a - [a - (2a + b)]$

2. Simplifica las expresiones.

   a) $4^2 \cdot 4^3$
   b) $(-3)^2 \cdot (-3)^5$
   c) $10^4 \cdot 10 \cdot 10^3$
   d) $b^3 \cdot b^6$
   e) xx^3x^6
   f) $4 \cdot 4^3 \cdot 4^5$
   g) $c^3 \cdot c^2 \cdot c$
   h) $(a + b)^2 \cdot (a + b)^6 \cdot (a + b) =$
   i) $d^9 \cdot d^{-6} \cdot d \cdot d^2$
   j) $a^9b^4a^{-5}b^3a =$

3. Resuelve las siguientes potencias.

a) $((3)^2)^3$
b) $(a^4)^2$
c) $(x^4)^5$
d) $(z^{-2})^3$
e) $(m^6)^{-2}$
f) $(ab)^2$
g) $(3x)^2$
h) $(2a)^3$
i) $(a^2b)^3$
j) $(2mn^2)^3$
k) $(3x^2y^3)^2$
l) $(5mnp)^3$
m) $(-2a^2b)^4$
n) $(2x^2)^3$
ñ) $(5x)^4$

4. Resuelve

a) $\frac{a^2b}{ab} =$
b) $\frac{m^9}{m^4}$
c) $\frac{c^5}{c^2}$
d) $\frac{p^4q^5r}{pqr}$
e) $\frac{4x^4y^3z}{6x^2y^5z}$
f) $\frac{13a^2b^3}{39a^4b}$
g) $\frac{x^6}{x^3}$
h) $\frac{y^5}{y^6}$
i) $\frac{x^3}{x^2}$
j) $\frac{6x^5y^2}{2x^3y}$
k) $\frac{(5m^4n)^3}{(-3mc)^2}$
l) $\frac{5x^9}{20x^{13}}$
m) $\frac{a^4b^5}{a^2b^2}$
n) $\frac{z^3}{z^4}$
ñ) $\frac{a^4bc^5}{a^2bc^4}$
o) $\frac{2a^2b}{4a^3b^2}$
p) $\left(\frac{9x^4y}{3x^2y}\right)^2$
q) $\frac{4x^2y}{2x}$

5. Multiplica los monomios.

a) $(ab)(a^2b^3)$
b) $(3x^2y)(4xy^4)$
c) $(2x)(3x^2)5x^4)$
d) $(-8a^2)(4ab)$
e) $(4xy^{-1}z)(-3xyz^2)$

6. Multiplicación de monomio por polinomio. Usa la propiedad distributiva.

a) $(5x+y)2 =$
b) $(x+1/2)8 =$
c) $(a-3b)a^2 =$
d) $(2a-1)(-6) =$
e) $(3a^2-2b)2ab =$
f) $ab(a^2+b^2) =$
g) $xy(x-y) =$
h) $x^2y(3x-3y) =$
i) $(x^2-x+1)x =$
j) $(x^2-x-1)(-4x^2) =$
k) $(3x^2-4x+1)2x^2 =$
l) $3x^2(x^3-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})$
m) $xy(x^2-2xy+y) =$
n) $16x^2(1/8+\frac{x}{4}+x^2)$
ñ) $20x(\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{3}{10})$
o) $24x^2(\frac{-3}{8}x-\frac{2}{3}x^2-\frac{x^3}{12})$
p) $16x^3y^3(\frac{xy}{8}+\frac{x^3}{4}+\frac{y^2}{4})$

7. Multiplicación de polinomio por polinomio. Efectuar las operaciones siguientes.

a) $(p^2+q^2)(p^2-q^2) =$
b) $(3y^2+7)(3y^2-6) =$
c) $(x^2+2y^2)(x^2-y^2) =$
d) $(a^2b^2+2ab)(b+a) =$
e) $(b-a)(a^2-b^2-2ab) =$
f) $(x^2-5a+25)(x+5) =$
g) $(2x^2-4x+2)(x-1) =$
h) $(a-1)(3a^2-6a+3) =$
i) $(4y^2-8y+4)(2y-2) =$
j) $(7a^2-7a+7)(a+1) =$

k) $(a^2+2ab+b^2)(a^2+b^2-2ab) =$

8. Averigua el procedimiento y efectúa las siguientes divisiones de polinomio entre monomio.

   a) $(6x^4y4x^3y^4+2xy^5)\div 2xy^3$
   b) $(-20r^7s^5t^3-25r^4s^4t^4-35rs^2t^5)\div -5rs^2t^3$
   c) $(6x^4+4x^3y^3-3x^2y^2-2x^2)\div 3x^2$
   d) $(6x^3-9x^4y)\div(3xy)$
   e) $(7a^3b^2++28a^8b^5-21a^7b^6-14a^5b^3)\div(7a^3b^2)$
   f) $(12a^{12}b^6-8a^8b^4-4a^4b^2)\div(4a^5b^2)$

9. Efectúa las divisiones de polinomio entre polinomio.

   a) $(6x^2+5x-1)\div(2x-1)$
   b) $(a^2-13a+30)\div(a-3)$
   c) $(x^3-2x^2-x+2)\div(x-1)$
   d) $(6a^3-2a^2+4a-16)\div(3a-4)$
   e) $(2x^3-3x^2-5x+11)\div(x-2)$
   f) $(12a^3-28a^2b+13ab^2-b^3)\div(6a+b)$
   g) $(8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3)\div(2x-3y)$
   h) $(2x^3-6x^2+xy-3y)\div(x-3)$

10.

11. Calcula los siguientes productos con un término común.

   a) $(x+10)(x-12)$
   b) $(x+1/2)(x+1/4)$
   c) $(x-15)(x+12)$
   d) $(y-24)(y+8)$
   e) $(x^2+1)(x^2-6)$
   f) $(u^2+3)(u^2-15)$
   g) $(x-9)(x+80)$
   h) $(ab+6)(ab-8)$
   i) $(a+x)(-3+x)$
   j) $(z+7)(-1+z)$

12. Calcula los siguientes binomios al cuadrado.

   a) $(3b+11a)^2$
   b) $(4m^2n+2mn^2)^2$
   c) $(x^2+2y^2)^2$
   d) $(abc-cde)^2$
   e) $(1/2x-1/3)^2$
   f) $(8ab-b)^2$
   g) $(4uv-uv)^2$
   h) $(a+1/4)^2$
   i) $(x+3/4)^2$

13. Calcula los productos de binomios conjugados.

   a) $(a+1/2(a-1/2)$
   b) $(-4+w)(4+w)$
   c) $(a+3ax)(a-3ax)$
   d) $(2a-3)(3+2a)$
   e) $(6-8y)(8y+6)$
   f) $(t-3x)(t+3x)$
   g) $(u+v/2)(u-v/2)$
   h) $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
   i) $(a^n-b^n)(a^n+b^n)$

14. Factoriza los siguientes polinomios extrayendo un factor común.

a) $24m^3n^3 - 12m^3n^2 + 30mn^2$
b) $36x^4y^2 - 8x^3y^3 + 24x^2y^4$
c) $63a^4b - 36a^3b^2 + 27a^2b^3$
d) $15a^5b - 12a^4b^2 + 3a^3b - 18a^2b^3$
e) $14x^4y^3 + 28x^3y^4 - 21x^2y^3$
f) $12x^3y^2 + 12x^4y - 21x^2y^3$
g) $2a^3bc - 2ab^3c + 4abc$
h) $5u^3v - 35u^2v^2 + 15uv^3$
i) $2x(x+3) + y(x+3)$
j) $5x^2(a-2) - 3y(a-2)$
k) $6a^2b(b-1) + 10c(b-1)$
l) $7a(m+n) - 3b(m+n)$
m) $a(x+1) + b(x+1) - c(x+1)$

15. Factoriza los siguientes trinomios.

a) $x^2 - 5x + 6$
b) $x^2 - 9x + 14$
c) $x^2 - 9x - 22$
d) $x^2 - x - 90$
e) $x^2 - 14x + 40$
f) $n^2 - 7n + 12$
g) $x^2 - 8x + 15$
h) $y^2 + 6y - 12$
i) $x^2 - x - 12$
j) $x^2 - 9x + 10$
k) $z^2 + 11z + 24$
l) $x^2 - 11x + 30$
m) $m^2 - 7m + 6$
n) $a^2 + 8a + 7$
ñ) $x^2 - 18x + 80$
o) $t^2 - 8t + 16$

16. Factoriza los trinomios.

a) $3x^2 + 5x - 2$
b) $3x^2 - 8x - 3$
c) $8x^2 + 22x + 55$
d) $7x^2 + 13x - 2$
e) $6x^2 + x - 1$

17. Factoriza los trinomios que son cuadrados perfectos.

a) $64 - 16a + a^2$
b) $4a^3 + 12a + 9$
c) $a^4 - 2a^2y^2 + y^4$
d) $x^2 - 4ax + 4a^2$
e) $121 - 22x + x^2$
f) $9 + 3ab + b^2$

18. Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $49a^2x^2 - 64$
b) $441 - y^2$
c) $36v^2 - 81$
d) $x^2 - 4$
e) $a^4b^2 - 25$
f) $a^8 - 9$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 50 = 0$
b) $2x^2 - 4x = 0$
c) $x^2 + 18x + 81 = 0$
d) $x^2 - 100 = 0$
e) $x^2 + 6x - 7 = 0$
f) $x^2 - 7x + 6 = 0$
g) $x^2 - 4x - 21 = 0$
h) $x^2 + 11x + 24 = 0$
i) $-3x^2 + x - 5 = 0$
j) $-27 = -3x^2$

k) $5x = -x^2$

l) $x^2 - x = 6$

m) $x^2 - 5x = 0$

n) $3y^2 = 6y$

ñ) $8x^2 - 10x + 2 = 0$

o) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

20. Resuelve los problemas dados a continuación planteando una ecuación cuadrática.

a) El producto de dos números enteros positivos consecutivos es 132, ¿cuáles son esos números?

b) Se desea cercar con malla un terreno rectangular que tiene $480m^2$ de superficie, si sabemos que el largo tiene 4m más que el ancho, ¿cuántos metros de malla se necesitan?

c) En una cancha de tenis el largo es el doble del ancho; si la cancha tiene una superficie de $162m^2$ ¿cuáles son sus dimensiones?

d) La altura de un triángulo es 11 centímetros mayor que la base. Si el área es de 40 centímetros cuadrados, ¿cuáles son las medidas del triángulo?

e) Si las dimensiones de un rectángulo difieren en un metro y su área es igual a $110m^2$, ¿cuáles son las dimensiones de éste rectángulo?

f) Un terreno rectangular tiene $260m^2$ de superficie. ¿Cuáles son sus dimensiones si el largo es el triple del ancho?