Cimientos Matemáticos

Módulo 7: Geometría elemental

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

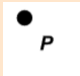
1. *MÓDULO 7: Geometria Elemental*

1.1. *Palabras importantes*

Vamos a reconocer algunas palabras que son fundamentales en la geometría.

Definición.

*Punto:*No existe una definición precisa para lo que es un punto, ya que se trata de algo tan pequeño que no tiene tamaño, es decir no tiene dimensiones, sin embargo los utilizamos para referirnos a una localización fija en el espacio o en el plano representándolos con una pequeña señal circular.



Punto P

Los puntos se denotan con letras mayúsculas.

Definición.

Linea:¿Qué hay de diferencia entre una línea curva y una línea recta? Todos sabemos que una línea es una colección infinita de puntos colocados uno detrás de otro pero, debemos tener clara la idea de lo que es una línea curva y una línea recta.

¿Cómo explicarías la diferencia entre una y otra?

Definición.

Linea Recta: Es una colección de puntos que se extiende indefinidamente hacia ambos sentidos conservando siempre la misma dirección.

Bien, ya dijimos antes que una línea es una colección *infinita* de puntos. Entonces una LINEA RECTA tiene una infinidad de puntos, es decir, no podemos decir con precisión cuántos puntos tiene. Lo que si es cierto es que para trazar una recta nos bastan únicamente DOS PUNTOS.

Si tenemos dos puntos A y B, podemos trazar una única recta que pasa por ellos.

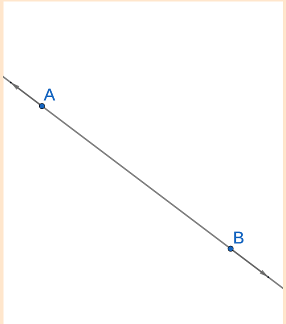


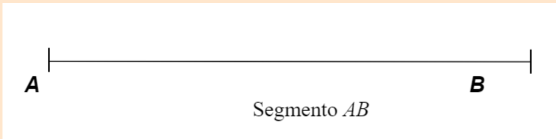
Figura 1: Recta AB

A veces se dibujan dos flechitas en los extremos de la línea para indicar que se trata de una línea infinita. No tiene principio ni tiene fin, sino que se extiende INDEFINIDAMENTE. Para simbolizar a la línea recta que pasa por **A**y **B** escribimos **AB**.

Cuando queremos delimitar claramente donde empieza y dónde termina una recta, es decir le ponemos EXTREMOS, tenemos lo que se llama SEGMENTO DE RECTA.

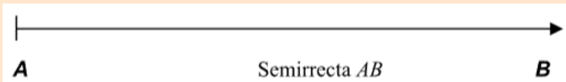
Definición.

*Segmento*Es una porción de recta limitada por dos extremos.



Definición.

*Semirecta*Es una porción de recta que tiene solamente un extremo y se extiende indefinidamente hacia el otro lado. También se le llama rayo.



Definición.

*Circunferencia:*Es un conjunto infinito de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo **O**, llamado *centro*.

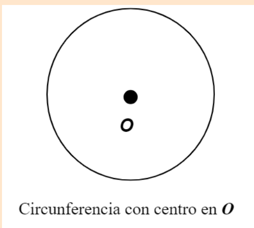
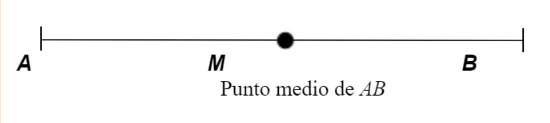


Figura 2: Circunferencia con centro en O.

Si medimos la distancia que hay de **O** a cualquier punto de la circunferencia, veremos que siempre es la misma. A esa distancia se le llama *radio* de la circunferencia. No hay que confundir *circunferencia* con *círculo*, ya que ésta última palabra se refiere al *interior* de la circunferencia.

Definición.

*Punto medio:*Dado un segmento **AB**, definimos el *punto medio* de **AB** como aquel punto que *equidista* de **A** y de B. Es decir, un punto **M** que está a la misma distancia de **A** y de **B**.



1.2. *Ángulos*

Definición.

Un *ángulo* es la abertura entre dos rayos (semirrectas) que tienen un origen común, llamado vértice.
En la figura, se muestra un ángulo, formado por los rayos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, y cuyo vértice es **O**.

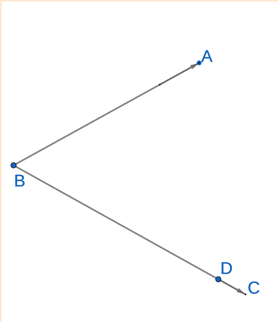
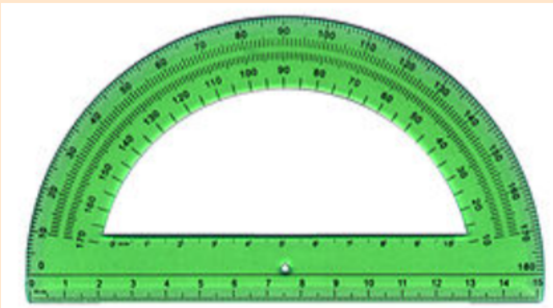


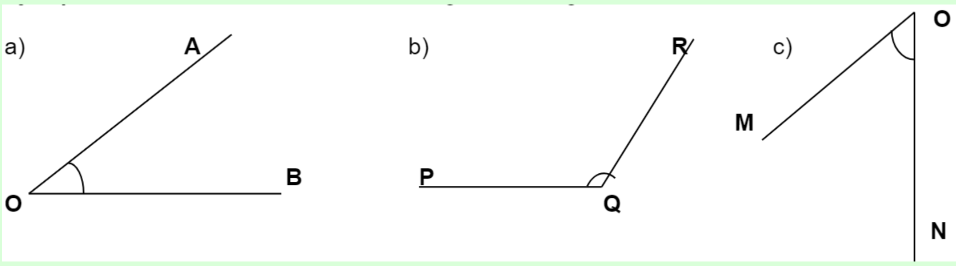
Figura 3: Caption

Simbólicamente escribimos $\angle$ AOB para denotar al ángulo **AOB**, o si no hay confusión, simplemente escribimos $\angle$ O (Ángulo **O**).
Regularmente, los ángulos se miden en grados y para eso se usa el TRANSPORTADOR.

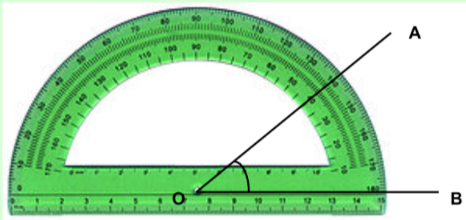


Ejemplo 1.

Determina la medida de los siguientes ángulos:

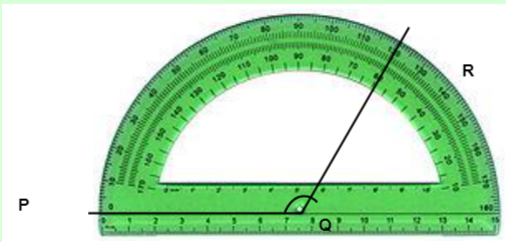


*Solución:*Debemos extender los rayos del ángulo si es necesario y colocar el transportador de manera adecuada, cuidando que el origen del transportador coincida con el vértice del ángulo:



Como el ángulo abre de derecha a izquierda, nos fijaremos en los números de abajo ya que en estos el cero esta a la derecha y la numeración va precisamente de derecha a izquierda, igual que el ángulo. Así que vemos que la medida del ángulo ∠AOB es de **40 grados** ó sea ∠ AOB = 40°.

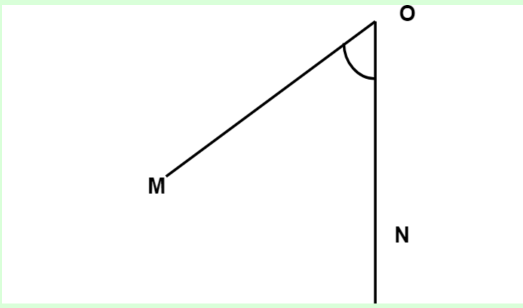
Ejemplo 2.



En este caso el ángulo abre de izquierda a derecha, entonces nos fijamos en los números de la escala de arriba ya que es la que va de izquierda a derecha y nos daremos cuenta que la medida del ∠ PQR es de **120°C**. Debemos tener cuidado de usar la escala adecuada, ya que de lo contrario pensaríamos que el ángulo anterior mide 60°, lo cual no es cierto.

Ejemplo 3.

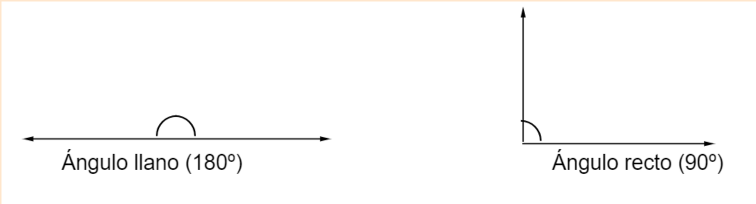
El inciso c) se queda como ejercicio para ti. ¿Cuánto mide el ángulo **MON**?



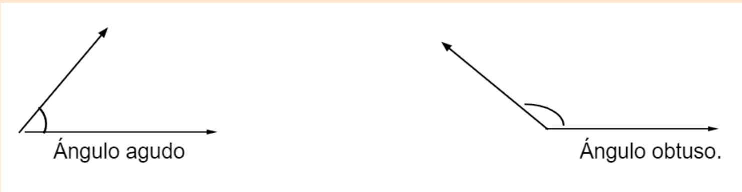
1.2.1. *Clasificación de los ángulos según su abertura*

Definición.

A los ángulos se les da un nombre especial dependiendo de cuánto miden.
Un ángulo de 180°, se conoce como ángulo llano (o plano) y un ángulo de 90° y se llama **ángulo recto**.



También tenemos *ángulos agudos*, que son los que miden menos de 90°, y *ángulos obtusos*, que miden, mas de 90° pero menos de 180°.



Resumiendo:

- *Angulo agudo.* Es aquel que mide menos de 90°.
- *Angulo recto.* Es el que mide exactamente 90°.
- *Angulo obtuso.* Es aquel que mide más de 90° pero menos de 180°.
- *Angulo llano.* Mide exactamente 180°.

Ejercicio 1.

Traza ángulos cercanos a las medidas siguientes y anota qué tipo de ángulo es.

1. 90°
2. 45°
3. 60°
4. 30°
5. 120°
6. 225°

1.2.2. *Clasificación de los ángulos según su suma*

Definición.

Dos ángulos que comparten un lado se llaman *ángulos adyacentes.* Cuando dos ángulos son adyacentes, podemos sumar su medida y considerar así el ángulo formado por ese par de ángulos. Hay algunas sumas especiales que requieren especial atención y por ello reciben un nombre especial.

- **Ángulos complementarios.** complementarios. Son dos ángulos adyacentes que sumados dan 90°.
- **Ángulos suplementarios.** Son dos ángulos adyacentes que sumados dan 180°.
- **Ángulos conjugados.**Son dos ángulos adyacentes que sumados dan 360°.

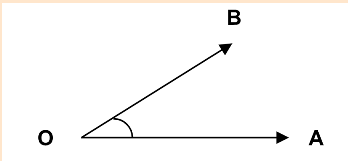
1.2.3. *Sistemas de medición de ángulos*

Definición.

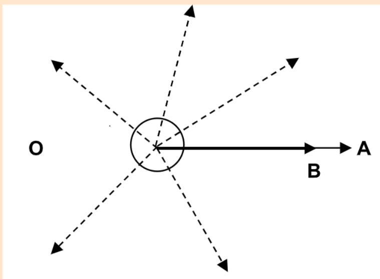
En general, consideraremos tres sistemas para medir ángulos:

- Sexagesimal (grados)
- Radial (radianes)
- Cíclico (revoluciones o partes de revolución)

Para ver como se relacionan éstos, consideremos un rayo OA fijo, y un segundo rayo móvil OB, que girará en torno al punto O, en sentido contrario a las manecillas de un reloj, describiendo así un ángulo positivo.



A medida que gira el rayo OB, se describirá un ángulo mayor (pues la abertura es mayor) hasta que OB vuelva a su posición original en la que coincide con OA, decimos que se ha descrito una vuelta completa o una revolución completa.



Definición.

Una revolución equivale en el sistema sexagesimal a 360º (grados) y en el sistema radial equivale a 2π radianes, así que tenemos:

$$1rev. = 360 = 2\pi rad.$$

De la relación anterior obtenemos también que:

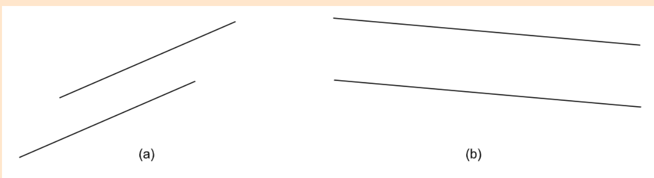
$$1/2rev. = 180 = \pi rad.$$

$$1/4rev. = 90 = \frac{\pi}{2} rad.$$

1.3. *Rectas paralelas*

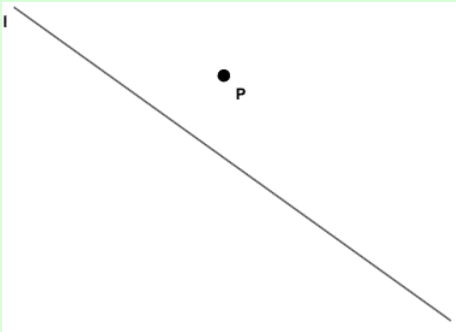
Definición.

Son dos rectas que guardan siempre la misma distancia en todos sus puntos. Por ejemplo estas:

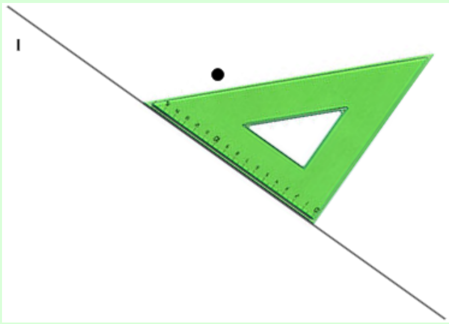


Ejemplo 4.

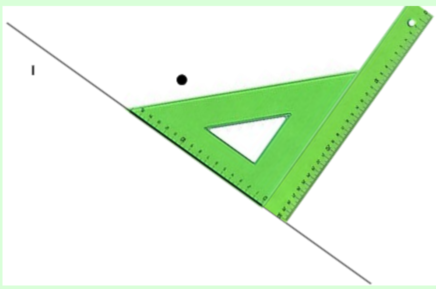
Para trazar paralelas se procede como sigue:
Trazar la paralela a la recta **l** que pase por el punto **P**. (Ver la figura)



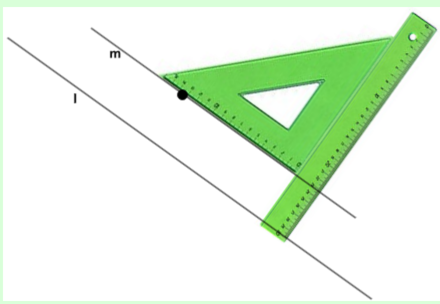
Solución. Se coloca la escuadra sobre la recta.



Ahora colocamos la regla sobre el lado de la escuadra que forma ángulo recto.



La regla servirá como apoyo para deslizar la escuadra hacia arriba, hasta que alcance el punto **P** y se traza la recta que buscamos.



La recta que resulta es la recta **m**. Para denotar que son paralelas se escribe así: $l \parallel m$.

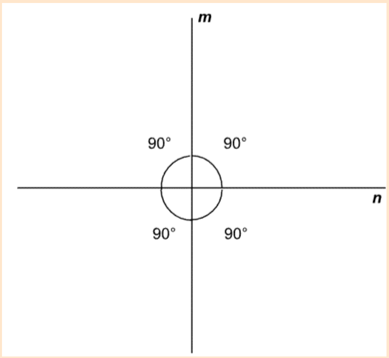
Ejercicio 2.

Traza una línea recta, y marca en ella dos puntos **A** y **B**, separados por una distancia de 5 cm. Traza una circunferencia que pase por **A** y por **B**. Con centro en **A** y un radio menor que 5 cm, traza una circunferencia y luego haz lo mismo pero con centro en **B**. Llama **P** y **Q** a los puntos donde éstas dos circunferencias pequeñas intersectan a la más grande, y que estén del mismo lado de la recta. Traza la recta **PQ**. ¿Cómo es ésta recta con respecto a la original?

1.4. *Rectas Perpendiculares*

Definición.

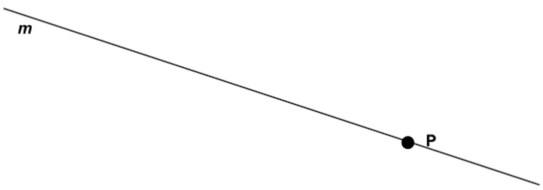
Dos rectas que se intersectan formando ángulos de 90° son <u>perpendiculares</u>.



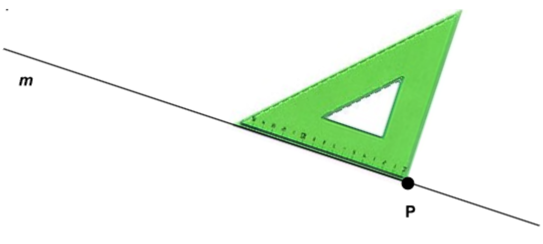
En la figura la recta m es perpendicular a la recta **n**. Esto se simboliza así: $m \perp n$.
Para trazar perpendiculares consideraremos varios casos:

Caso 1.Trazar una perpendicular a una recta por un punto sobre ella.

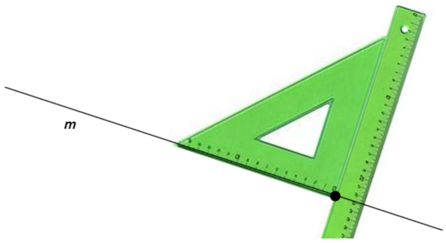
Trazar la perpendicular a la recta **m** que pasa por **P**. Utiliza la escuadra.



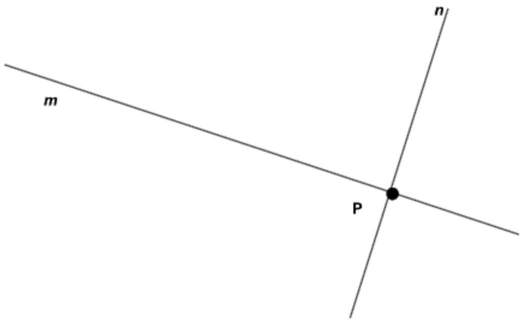
*Solución.*Colocamos la escuadra sobre la recta de modo que el vértice del ángulo recto quede sobre el punto **P**.



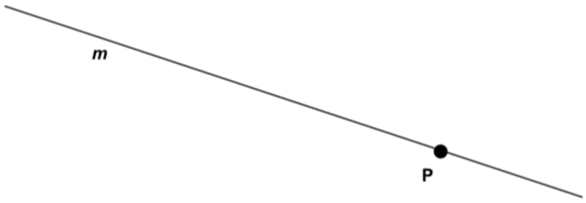
Enseguida colocamos la regla como se muestra.



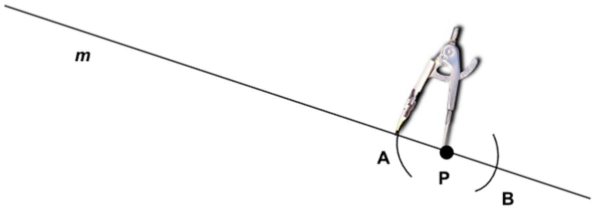
Se quita la escuadra y se traza la perpendicular deseada. Llamémosle **n**.



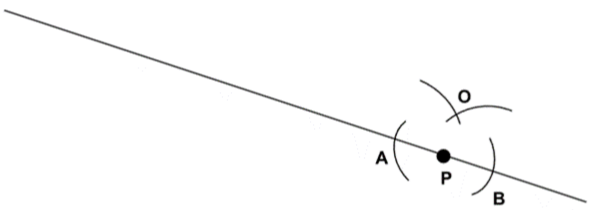
Trazar la perpendicular a la recta ***m*** *que pasa por* ***P****.* <u>*Sin utilizar escuadra*</u>*.*



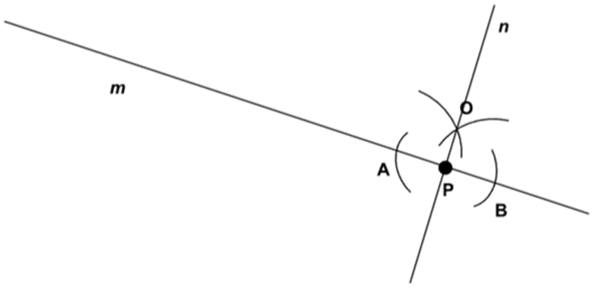
*Solución.*En este caso utilizaremos el compás. El compás es un instrumento geométrico que no solo sirve para dibujar círculos.
Tomamos el compás y lo abrimos un poco, no importa cuánto. Nos apoyamos en **P** y dibujamos dos pequeños arcos, uno de cada lado, como se muestra:



Llamemos **A** y **B** a los puntos donde los arcos cortan con la recta **m**.
Ahora abrimos un poco más el compás (otra vez, no importa cuánto), y nos apoyamos en **A** para trazar un arco de circunferencia y otro con la misma abertura pero apoyados en **B**, tal y como se muestra en seguida.

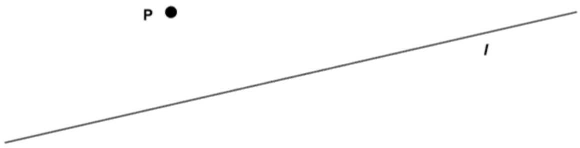


Sea **O** el punto donde se intersecan los dos arcos. Trazamos la recta **OP** y obtenemos el resultado deseado.

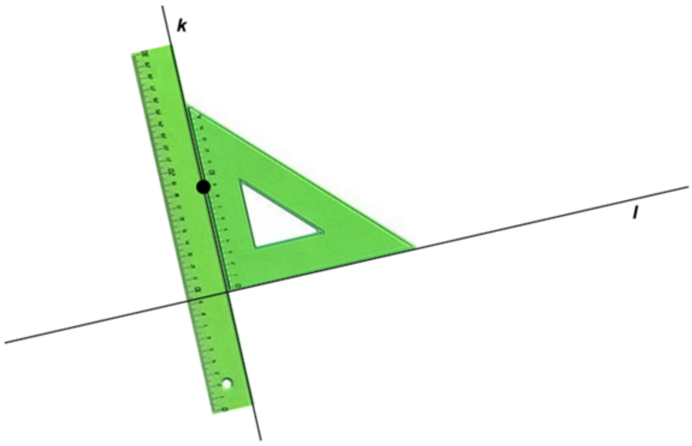


Caso 2.Trazar una perpendicular a una recta por un punto exterior a ella.

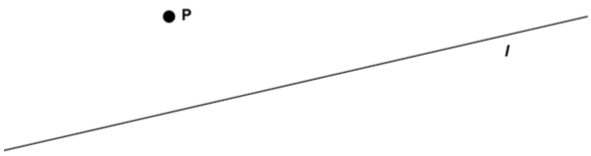
Trazar la perpendicular a la recta l que pasa por el punto **P**. Utiliza tu escuadra.



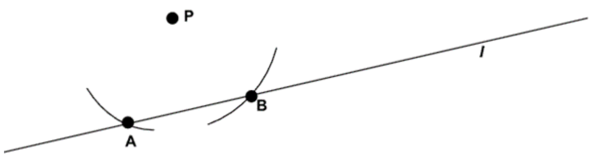
solución. Simplemente colocamos la escuadra sobre la recta **l** como se muestra. Enseguida colocamos la regla y trazamos la perpendicular buscada.



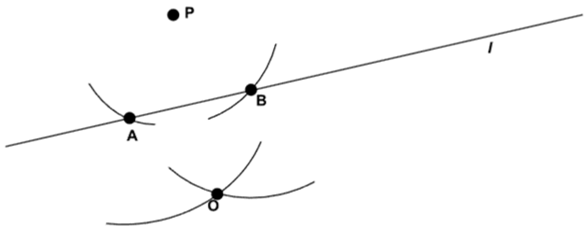
*Ejemplo.*Trazar la perpendicular a la recta l que pasa por el punto **P**. Sin utilizar escuadra.



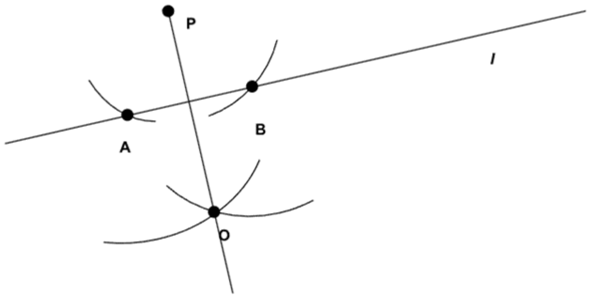
*Solución.*Esta vez lo haremos con el compás. Con centro en **P** y cualquier abertura trazamos dos arcos que corten a la recta **l** en dos puntos **A** y **B** como se muestra a continuación.



Ahora, con la misma abertura del compás (o con una distinta) nos apoyamos en **A** y trazamos un arco hacia el otro lado de **l** y lo mismo apoyados en **B**, para obtener lo siguiente:



Sea **O** el punto de intersección de estos arcos. Trazamos la recta **OP** y esa es la que buscamos.



Ejercicio 3.

Traza una circunferencia con centro en un punto **A** y cualquier radio. Coloca un punto **B** sobre ella y, con el mismo radio, traza otra circunferencia con centro en **B**. Llama **C** y **D** a los puntos donde se intersecan las dos circunferencias.

1. ¿Qué figura es **ABCD**?
2. ¿Cómo son las rectas **AB** y **CD**?
3. ¿Dónde se intersecan los segmentos **AB** y **CD**?

Ejercicio 4.

Con centro en un punto **O**, construye una circunferencia del radio que desees y marca en ella un punto **A**; traza una recta perpendicular al radio **OA** que pase por **A**. Nota que ésta recta toca el círculo sin cruzarlo. Dicha recta se denomina *tangente* a la circunferencia en el punto **A**. El punto **A** es el *punto de tangencia*.

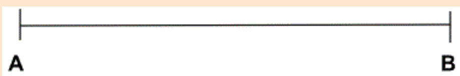
Ejercicio 5.

Traza dos circunferencias de radios distintos y que no se intersecten. Ahora traza todas las rectas posibles que sean tangentes a las dos circunferencias. ¿Cuántas son?

1.5. *Mediatriz de un segmento*

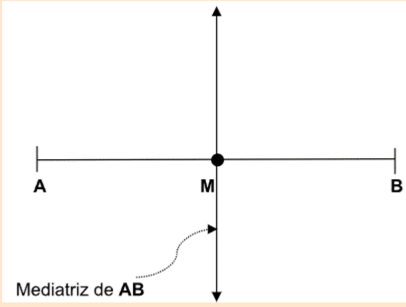
Definición.

Es la perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.
Si tenemos un segmento **AB**.



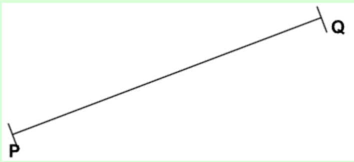
Definición.

Localizamos el punto medio **M**, es decir, el punto que está exactamente a la mitad entre **A** y **B**, y con una escuadra podemos trazar la perpendicular que pasa por él.

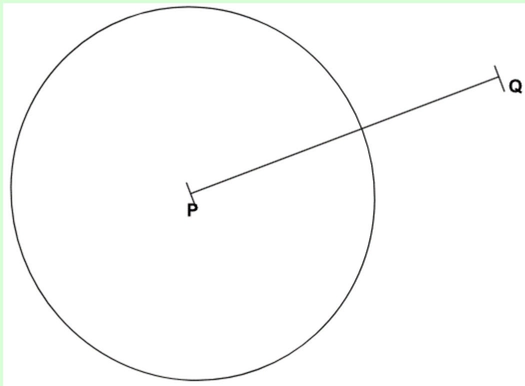


Ejemplo 5.

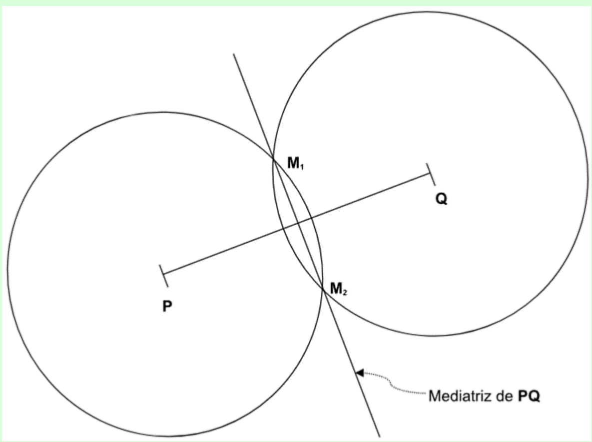
Construir la mediatriz del segmento **PQ** utilizando únicamente regla y compás.



*Solución.*Apoyamos el compás en P y trazamos una circunferencia.



Ahora igualmente, trazamos otra circunferencia con el mismo radio, pero ahora con centro en Q.
Esas dos circunferencias se intersecan en dos puntos M_1 y M_2 . Trazamos la recta que pasa por ellos, es decir, la recta M 1 M 2 y esa es la mediatriz del segmento PQ.



Ejercicio 6.

Dibuja en tu cuaderno tres puntos **A**, **B** y **C**, traza los segmentos **AB** y **BC**; construye las mediatrices de los segmentos **AB** y **BC**, traza una circunferencia que pase por los tres puntos. ¿Cuántas circunferencias que pasen por A, B y C se pueden trazar?

Ejercicio 7.

Traza una recta de 10 cm de longitud y llama A y B a sus extremos, luego:

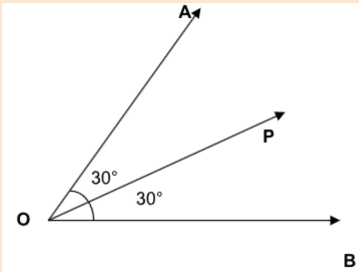
- Traza un círculo con centro en **A** y radio mayor que 5 cm.
- Con la misma apertura del compás, traza un círculo con centro en **B** y marca con rojo los puntos donde se intersectan los círculos que trazaste.

Sobre la misma figura repite muchas veces los pasos a) y b), tomando cada vez círculos de radios mayores que 5 cm. ¿Qué observas? ¿Cómo se le llama a la recta que obtuviste? ¿Qué propiedades tiene?

1.6. *Bisectriz de un ángulo*

Definición.

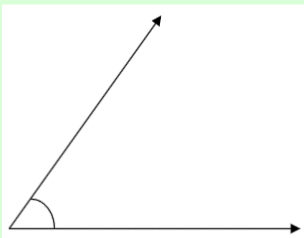
Es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.
Dado el ángulo $\angle AOB$, la mediatriz lo debe dividir en dos ángulos menores que midan lo mismo.
Supongamos que $\angle AOB = 60$, al trazar la mediatriz OP se forman los ángulos $\angle AOP$ y $\angle POB$, que deberán medir ambos 30.



Veamos un ejemplo de cómo se construye la bisectriz de un ángulo dado, utilizando regla y compás.

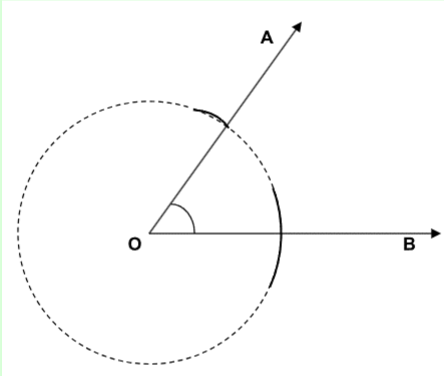
Ejemplo 6.

Construir la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

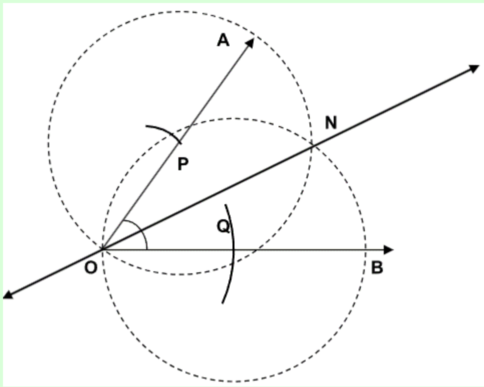


*Solución.*Tomamos el compás con cualquier abertura, apoyado en **O**, trazamos un pequeño arco que corte al rayo **OA** y otro que corte al rayo **OB**. Como si trazáramos una circunferencia con centro en **O**, pero solo nos interesan los puntos **P** y **Q**, con los que interseca a los rayos.

Ejemplo 6cont.



Ahora apoyamos el compás en **A** y trazamos una circunferencia, y lo mismo hacemos en **B** usando la misma abertura.
Esas dos circunferencias se intersecan en dos puntos. Trazamos la línea recta que los une y hemos obtenido el resultado deseado.
En este caso hemos trazado las dos últimas circunferencias con el mismo radio que las primeras, entonces uno de los puntos donde se intersecan es el vértice **O** del ángulo y el otro lo llamamos **N**. La mediatriz es por tanto, la recta **ON**.

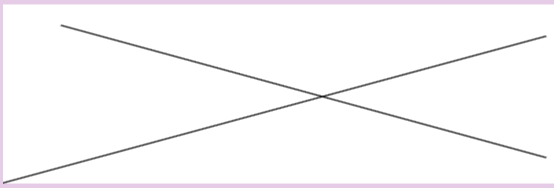


Ejercicio 8.

Traza un ángulo que mida 40° y llama **O** al vértice. Con centro en **O** y cualquier radio, traza una circunferencia que corte a ambos rayos del ángulo. Llama **A** y **B** a los puntos donde la circunferencia intersecta a cada rayo. Ahora con centro en **B**, y un radio más pequeño, traza una circunferencia. Traza otra circunferencia del mismo radio, pero con su centro en **A**. Llama **P** y **Q** a los puntos donde se cortan éstas dos últimas circunferencias. Traza la recta **PQ** y extiéndela. ¿Por qué otro punto pasa esa recta? ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos que se formaron? ¿Cómo se le llama a esta recta?

Ejercicio 9.

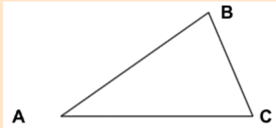
Traza dos rectas que se intersectan, como se muestra en la figura, y marca en una de ellas un punto **P**. Construye una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y **P** sea uno de los puntos de tangencia.



1.7. *Triángulos*

Definición.

Tres puntos no colineales (no alineados) **A**, **B** y **C**, determinan un triángulo, que es una figura que consta de tres segmentos, tres vértices y tres ángulos.



Decimos que el triángulo **ABC**, denotado $\triangle ABC$, tiene los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC} y \overline{AC}$, y sus ángulos son $\angle CAB, \angle ABC y \angle BCA$. *La letra del centro es la que indica el vértice del ángulo.* De modo que, podemos escribir simplemente $\angle A, \angle B y \angle C$. Los vértices son los puntos que definen al triángulo: **A**, **B** y **C**.

- **Triángulo Equilátero.** Sus tres lados miden lo mismo.
- **Triángulo Isósceles.** Dos de sus lados miden lo mismo.
- **Triángulo Escaleno.** Sus tres lados tienen diferente medida.

Ejercicio 10.

Traza tres circunferencias con el mismo radio: Una con centro en un punto **A** cualquiera, otra con centro en un punto **B** de la circunferencia anterior y la tercera con centro **C**, que es uno de los puntos donde se intersecan las dos primeras circunferencias.

1. ¿Por qué puntos pasa la circunferencia con centro en **C**?
2. ¿Cómo es el triángulo **ABC**? ¿Por qué?

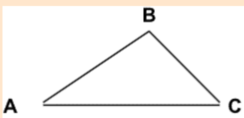
Ejercicio 11.

Dibuja un triángulo cualquiera y traza una circunferencia que pase por sus tres vértices.

1.7.1. *Teorema de la suma de los ángulos interiores*

Teorema.

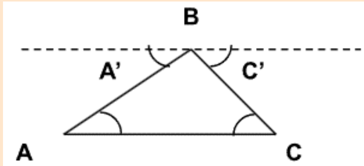
Teorema. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°. Para convencernos de que esto es cierto, consideremos el siguiente triángulo **ABC**.



Si trazamos por **B**, una paralela al segmento **AC** se forman los ángulos **A'** y **C'**, los cuales, por ser alternos internos entre paralelas, son iguales a los ángulos **A** y **C**, respectivamente, o sea

$$A = A', y C = C'$$

Teorema cont.



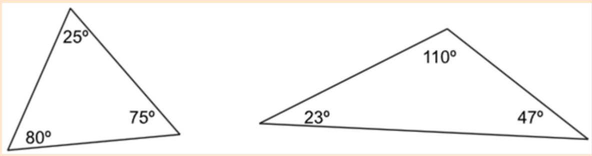
Ahora, notemos que los ángulos **A'**, **B** y **C'** forman un ángulo llano (de 180°) es decir:

$$A' + B + C' = 180$$

y sustituyendo **A'** por A y **C'** por C, obtenemos que

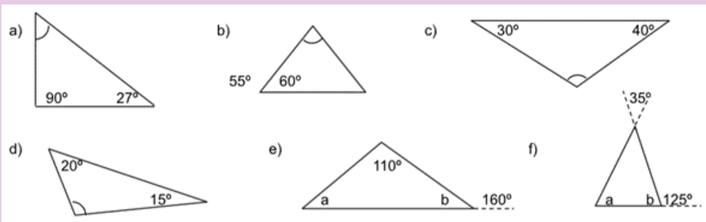
$$A + B + C = 180$$

Es decir, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°. Esto se cumple para cualquier triángulo. Veamos por ejemplo los siguientes:



Ejercicio 12.

¿Cuánto vale el ángulo indicado en cada uno de los siguientes triángulos?



Ejercicio 13.

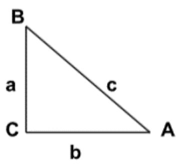
¿Cuál es la medida que cada ángulo interior de un triángulo equilátero?

1.7.2. *Teorema de Pitágoras*

Otro resultado de fundamental importancia no solo de la geometría, sino de las matemáticas en general, es el famoso Teorema del filósofo y matemático Pitágoras de Samos, que tiene aplicaciones en gran cantidad de ramas de la Ciencia. Lo enunciaremos y daremos una demostración geométrica intuitiva, que está lejos de ser una demostración formal pero para nuestros fines será adecuada.

Antes de ello debemos mencionar un poco de notación. Cuando un triángulo es rectángulo (tiene un ángulo recto), los lados que son mutuamente perpendiculares, o sea, los rayos del ángulo recto, se llaman *catetos* y el lado que siempre es el de mayor longitud es la *hipotenusa* del triángulo rectángulo.

Usualmente llamamos **C** al ángulo de 90° y arbitrariamente **A** y **B** a los otros dos ángulos. Los catetos del triángulo los denotamos como a y b, y la hipotenusa como c, de tal manera que a cada ángulo se le asigne la misma letra que a su lado opuesto, solo que mayúscula.



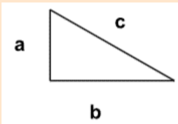
Aclarado lo anterior enunciaremos el teorema.

Teorema.

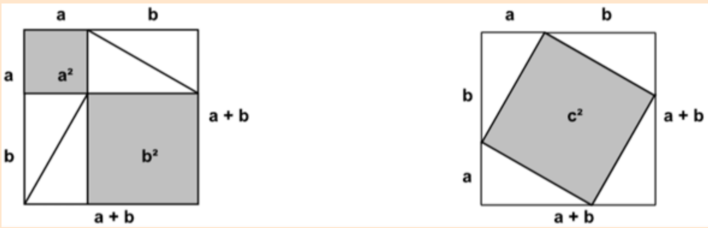
Teorema. *En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*
Es decir si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es su hipotenusa, entonces se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Para ver que esto es cierto consideremos un triángulo rectángulo cualquiera, de catetos a y b, e hipotenusa c:



Construyamos dos cuadrados de lado a + b, como se muestra.



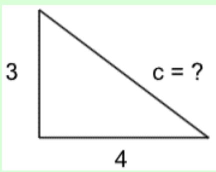
El área de cada uno de éstos cuadrados es $(a+b)^2$. Notemos que el área del primer cuadrado se divide en 6: dos cuadrados más pequeños de áreas a^2 y b^2 respectivamente, y cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. El área del segundo cuadrado es igual a la del primero, pero notamos que está compuesta por 5 áreas: la de un cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo (c), y cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. Como los dos cuadrados tienen áreas iguales, si ignoramos las áreas de los cuatro triángulos, está claro que las áreas sombreadas restantes seguirán siendo iguales. Esto es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ésta es una demostración sencilla del teorema, que está basada en áreas. Actualmente se conocen muchísimas demostraciones de éste teorema, pero aquí, la anterior será suficiente para comprender su significado.

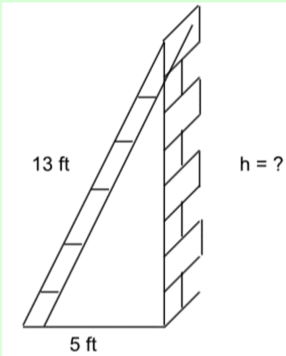
Ejemplo 7.

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 unidades respectivamente. Hallar la longitud de la hipotenusa.
Solución. En éste caso $a = 3$ y $b = 4$. Por el Teorema de Pitágoras se tiene que: $c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = 3^2 + 4^2 \implies c^2 = 9 + 16 \implies c^2 = 25 \implies c = 5$



Ejemplo 8.

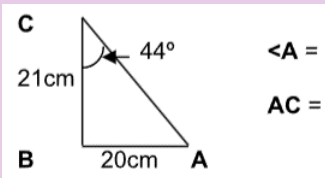
Una escalera de 13 ft está apoyada sobre una pared a una altura h. La distancia de separación horizontal de la escalera a la pared es de 5 ft. ¿cuál es la altura h?
*Solución.*En este caso la hipotenusa es la longitud de la escalera, que mide 13 ft, y conocemos uno de los catetos del triángulo que se forma, que es la distancia horizontal de 5 ft. Queremos conocer el valor del otro cateto.



Por teorema de Pitágoras tenemos que: $5^2 + h^2 = 13^2 \implies 25 + h^2 = 169 \implies h^2 = 169 - 25 \implies h^2 = 144 \implies h = \sqrt{144} \implies h = 12ft$

Ejercicio 14.

Completa con los datos que faltan.



Ejercicio 15.

Calcula el área de un triángulo equilátero si su perímetro mide 36 cm.

1.8. *Ejercicios y problemas*

1. Señala la respuesta correcta a las siguientes cuestiones. Para ello escribe en el paréntesis de la derecha las letras que correspondan a dicha respuesta.

   a) Es la abertura entre dos semirrectas que se encuentran en un origen común:
   a) grado b) angulo c) medida d)circunferencia.

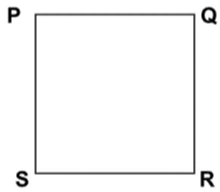
   b) Es la recta que divide a un ángulo en dos iguales.
   a)mediatriz b)bicectriz c)radio d) diametro

   c) c) Es una porción de recta limitada por dos extremos.
   a)punto medio b) recta c) segmento d)circulo

   d) Es la perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.
   a)directriz b)bicectriz c) generatriz d) mediatriz

   e) Un ángulo que mide entre 90º y 180º es.
   a)agudo b) recto c) obtuso d)llano

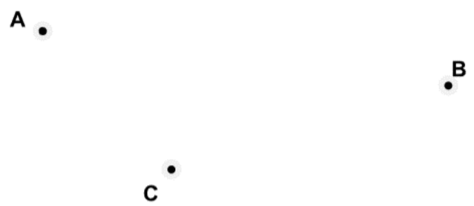
2. Considera el siguiente cuadrado **PQRS**.



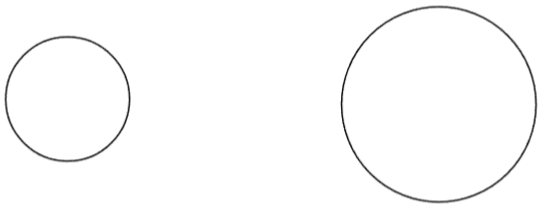
a) Traza el punto medio de **PQ** y llámalo **A**.
b) Traza el punto medio de **QR** y llámalo **B**.
c) Traza el punto medio de **RS** y llámalo **C**.
d) Construye el cuadrado **ABCD**.
e) Traza los segmentos **AC** y **BD** y llama **O** al punto donde se cruzan.
f) Traza la circunferencia inscrita al cuadrado, con centro en **O**.
g) Traza la circunferencia circunscrita al cuadrado con centro en **O**.

3. Traza ángulos de las siguientes medidas. Escribe qué tipo de ángulo es cada uno y construye la bisectriz de cada uno de ellos.
a)48° b)60° c)90° d)100°

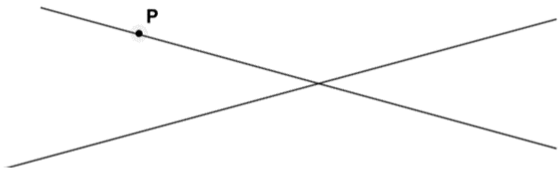
4. A continuación se muestran tres puntos **A**, **B** y **C**. Dibuja el triángulo **ABC** y traza la circunferencia que pasa por sus tres vértices. Traza la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo. Averigua ¿cómo se llaman éstas circunferencias?



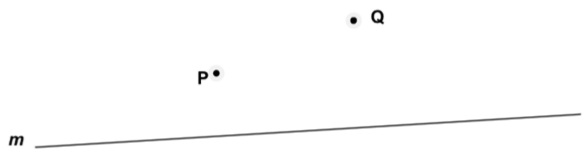
5. A continuación se presentan dos circunferencias. Traza todas las rectas posibles que sean tangentes a las dos circunferencias.



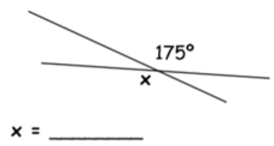
6. A continuación se muestran dos rectas que se intersectan. Construye una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y **P** sea uno de los puntos de tangencia.

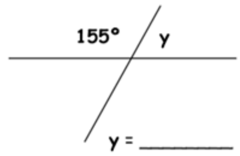


7. A continuación se presenta una recta **m** y dos puntos **P** y **Q** fuera de **m**. Construye una circunferencia que tenga su centro sobre la recta **m** y que pase por **P** y **Q**.

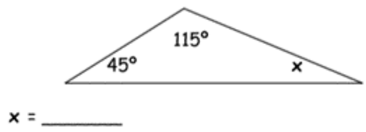


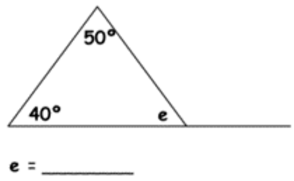
8. Encuentra el valor de los ángulos indicados.



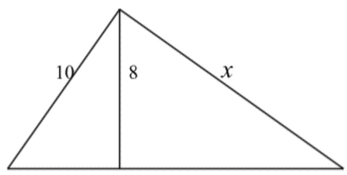


9. Determina el valor de los ángulos que se indican.

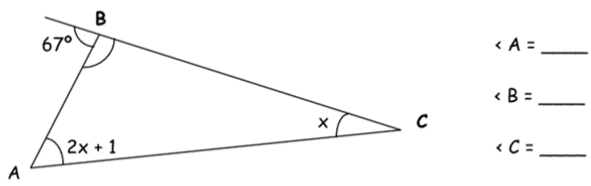




10. ¿Cuánto vale x ?



11. Halla las medidas de los ángulos **A**, **B** y **C** del siguiente triángulo.



12. Encuentra la longitud que falta en los siguientes triángulos rectángulos.