Cimientos Matemáticos

Módulo 8: Nociones de trigonometría

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. MÓDULO 8. NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA

1.1. El número π

Definición.

En matemáticas frecuentemente usamos el término *razón*. El significado que le damos aquí es muy diferente del que se le da comúnmente a esta palabra. Una *razón* es la comparación de dos cantidades por medio de un cociente.
Por ejemplo, si el segmento **AB** mide 9 cm, y el segmento **CD** mide 3 cm, comparamos uno con el otro escribiendo:
$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, y así podemos decir que **CD** mide 1/3 de **AB**.
$\frac{AB}{CD} = \frac{9}{3} = 3$, y entonces decimos también que **AB** es 3 veces **CD**.

Ejemplo 1.

Otro ejemplo, si 15 de 35 alumnos que hay en un grupo, reprueban un examen de historia, podemos escribir esto como una razón:
$\frac{15}{35}$ reprobaron el examen, o bien, si simplificamos $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$, decimos que 3/7 partes del grupo reprobó. También puede efectuarse la división y escribir la razón como número decimal.

$$\frac{1}{3} = 0.33333.... = 0.\overline{3} \qquad y \qquad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

Todos hemos trabajado en la enseñanza elemental, con el número π (pi). Éste importante número es la razón de dos cantidades. Si consideramos cualquier circunferencia, y medimos su longitud **C** y su diámetro **d**, cualquiera que sea el tamaño de la circunferencia, la razón $\frac{C}{d}$ es siempre la misma. Incluso si consideramos varias circunferencias C_1, C_2, C_3 , etc. con sus respectivos diámetros d_1, d_2, d_3 etc., se tiene que:

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} \approx 3.14$$

Es decir la razón entre la circunferencia y el diámetro siempre es aproximadamente igual a 3.14 o 3.15, o más propiamente:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Los griegos encontraron con gran asombro que π, aún siendo la razón de dos longitudes, es un número irracional, es decir, que no es posible escribirlo como el cociente de dos enteros (como fracción) ni como número con parte decimal finita o periódica. Para fines prácticos se usan aproximaciones de π como $\pi \approx \frac{22}{7}, \pi \approx 3.14160$ aunque en realidad el número π se escribe como 3.14159... seguido de una infinidad de cifras decimales.

1.2. Medición de los ángulos y arcos de circunferencia

Definición.

Recordemos que un ángulo es la abertura entre dos semirrectas que tienen un origen común, llamado vértice. En el capítulo anterior dijimos que había tres maneras distintas de medir los ángulos: los grados, que son un sistema sexagesimal (base 60); los radianes y las revoluciones. Una revolución es un giro completo, en el cual se describen 360°, o 6.2832 radianes, es decir:

$$1rev = 360 = 2\pi rad$$

1.2.1. *Conversión de grados a radianes y viceversa*

Definición.

De la relación anterior podemos despejar y obtener cuánto vale un grado, en términos de radianes:

Como $360 = 2\pi rad$, se tiene que: Factor para convertir de grados a radianes.

$$1 = \frac{2\pi}{360}\frac{\pi}{180}$$

También, tenemos que $2\pi rad. = 360$, y por tanto:Factor para convertir de radianes a grados.

$$1rad = \frac{360grados}{2\pi rad} = \frac{180grados}{\pi rad}$$

Ejemplo 2.

¿A cuánto equivalen 48° en radianes?
*Solución.*Usamos que como $1 = \frac{\pi rad}{180}$, Entonces $48 = 48\frac{\pi rad}{180} = \frac{48\pi}{180}$ Simplificando lo anterior nos quedan $\frac{4\pi}{15}$ radianes.

Ejemplo 3.

¿Cuánto mide en grados un ángulo de $\frac{\pi}{12}rad$?
Solución. En este caso queremos convertir radianes a grados, por tanto usaremos el otro factor de conversión: $1rad = \frac{180}{\pi}grad$, Multiplicando la igualdad anterior por $\frac{\pi}{12}$, se obtiene: $\frac{\pi}{12}rad = \frac{\pi}{12}\frac{180}{\pi}grad$. Simplificamos:$= \frac{180}{12}grad. = 15$ grados.

Ejercicio 1.

Convertir los siguientes ángulos a radianes.
a)48° b)225° c)100° d)36°

1.2.2. *Longitud de un arco*

Definición.

Si queremos determinar la longitud de un arco S de circunferencia, que se encuentrasubtendido por un ángulo central θ . Usaremos la expresión:

$$S = r\theta$$

Donde **S** es la longitud del arco. r es el radio de la circunferencia. θ es el ángulo central que subtiende al arco. Si $r = 1$, entonces tenemos el caso de una circunferencia unitaria, en la que $S = \theta$

Ejemplo 4.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia, subtendido por un ángulo central de $\frac{\pi}{5}$ radianes, si el diámetro de la circunferencia es 6.2 cm?
Solución. Recordemos que el diámetro es el doble del radio, así que el radio en este caso es de 3.1 cm. Por tanto la longitud del arco es: $S = (3.1cm)(\frac{\pi}{5}) = \frac{3.1\pi}{5} = 1.9477cm$

Ejercicio 2.

Resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Cuál es la longitud del arco de una circunferencia si el ángulo central que lo forma mide $\frac{\pi}{5}$ y el radio de la circunferencia es de 5.8 cm?
2. Encuentra la longitud del arco formado por un ángulo central de 4/9 radianes de una circunferencia de 12 cm de diámetro.
3. Encuentra la longitud del arco determinado por un ángulo central de $\frac{\pi}{5}$ radianes en una circunferencia de 7 cm de radio.
4. ¿Cuál es la longitud del arco S en la siguiente figura?

1.3. *Triángulos semejantes*

Definición.

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales. Si los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes, entonces:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

También se cumplen las relaciones

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

y sus recíprocas, es decir, invirtiendo las fracciones.

Ejemplo 5.

Por ejemplo, considérese el triángulo **ABC** cuyos lados miden 3, 4 y 5 respectivamente; y el triángulo **PQR** cuyos lados miden 6, 8 y 10 respectivamente.
Estos triángulos son semejantes pues:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

La razón entre sus lados correspondientes es igual a 1/2, entonces se dice que son semejantes con razón de semejanza 1/2.

Ejercicio 3.

Un poste de 4m proyecta una sombra de 3m, al mismo tiempo que un árbol proyecta una sombra de 2.4m. Calcula la altura del árbol.

Ejercicio 4.

Un hombre de 1.80 m proyecta una sombra de 2.7m y se encuentra a 6.3m del pie de una lámpara. Hallar la altura de la lámpara.

1.4. *Razones trigonométricas*

Definición.

Vamos ahora a definir 6 razones de especial importancia en el estudio de la trigonometría. Prácticamente el curso se tratará de estudiar las relaciones y las propiedades de éstas razones.
Consideremos un triángulo rectángulo **ABC**. Los ángulos **A** y **B** son agudos y complementarios (suman 90°), **a** es opuesto al ángulo **A** y adyacente al ángulo **B** y **b** es opuesto al ángulo **B** y adyacente al ángulo **A**.

Definimos entonces las funciones trigonométricas de un ángulo agudo como:

Seno de un ángulo = Cateto opuesto /hipotenusa
Coseno de un ángulo = adyacente cateto / hipotenusa
Tangente de un ángulo = opuesto cateto / cateto adyacente
Cotangente de un ángulo = adyacente cateto / cateto opuesto.
Secante de un ángulo = hipotenusa / cateto adyacente
Cosecante de un ángulo = hipotenusa / cateto opuesto

En el triángulo **ABC** tenemos las funciones trigonométricas de **A** y de **B** como:
Para el ángulo **A**:

1. $SenA = \frac{a}{c}$
2. $CosA = \frac{b}{c}$
3. $TanA = \frac{a}{b}$
4. $CotA = \frac{b}{a}$
5. $SecA = \frac{c}{b}$
6. $CscA = \frac{c}{a}$

Para el ángulo **B**:

1. $SenB = \frac{b}{c}$
2. $CosB = \frac{a}{c}$
3. $TanB = \frac{b}{a}$
4. $CotB = \frac{a}{b}$
5. $SecB = \frac{c}{a}$
6. $CscB = \frac{c}{b}$

Ejercicio 5.

Considera un triángulo equilátero de lado 1 y traza la altura. Esto divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos ángulos agudos son 30° y 60°. Determina las razones trigonométricas de esos ángulos.

Ejercicio 6.

Considera un cuadrado de lado 1 y traza su diagonal. Esto divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos ángulos agudos son 45° y 45°. Determina las razones trigonométricas de esos ángulos.

Vamos ahora a resolver triángulos rectángulos. Resolver un triangulo significa conocer sus 6 elementos: tres lados y tres ángulos. Usando las razones trigonométricas, y con ayuda de la calculadora, podemos resolver triángulos rectángulos.

Ejemplo 6.

Resolver el triángulo rectángulo **ABC**, conociendo $\mathbf{B} = 48°$ y c = 12.
*Solución.*Hagamos un dibujo del triángulo.
Como el triángulo es rectángulo, $C = 90$ y el ángulo **A** lo encontramos por diferencia, pues sabemos que la suma de los tres debe ser $A + B + C = 180$, así que:

$$A = 180 - (B + C) = 180 - (48 + 90) = 180 - 138 = 42$$

Ahora, conocemos también el ángulo **B**, y la hipotenusa. Así que podemos usar la función seno o coseno, pues son las que involucran a la hipotenusa. Usando el sen **B**, tenemos que:

$$SenB = \frac{b}{c}$$

Pero $c = 12$ y por medio de las tablas vemos que $senB = sen48 = 0.7431$, así que nos queda:

$$Sen48 = \frac{b}{12} = 0.7431$$

Despejamos **b** de la última igualdad:

$$b = (12)(7431.0) = 8.9177$$

Para hallar el cateto a, usemos la función coseno de **B**, pues $CosB = \frac{a}{c}$, y como $c = 12$ y usando la calculadora encontramos que $cosB = cos48 = 0.6691$, tenemos:

$$Cos48 = \frac{a}{12} = 0.6691$$

Despejando a, se tiene:

$$a = (12)(6691.0) = 8.03$$

Por tanto los datos completos del triángulo **ABC** son:

- $A = 42$
- $B = 48$
- $C = 90$
- $a = 8.03$
- $b = 8.91$
- $c = 12$

*Comprobación.*Para los ángulos, se debe cumplir que la suma de los tres sea 180°, lo cual es cierto, pues $A + B + C = 42 + 48 + 90 = 180$.

Para los lados, debe satisfacerse el teorema de Pitágoras, por tratarse de un triángulo rectángulo:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(8.03)^2 + (8.91)^2 = 12^2$$
$$64.48 + 79.38 = 144$$
$$143.87 \approx 144$$

El hecho de obtener un pequeño error de aproximación, es por que usamos valores aproximados en las funciones trigonométricas, pero como vemos, el error es "casi nada".

Ejercicio 7.

Usando tu calculadora, encuentra el valor aproximado de las siguientes funciones.

1. $sen 1517'$
2. $cos 4434'$
3. $tan 725'$
4. $cos 4736'$

Ejercicio 8.

Dado el valor de la función, encuentra el valor de α en cada caso.

1. $cos\alpha = 0.44$
2. $sen\alpha = 0.9755$
3. $cot\alpha = 2.1873$
4. $sen\alpha = 0.39$

Ejercicio 9.

Resuélvanse los siguientes triángulos rectángulos.

1.5. *El plano cartesiano*

Definición.

Quizás ya has aprendido que un par de coordenadas (x, y) representa un punto en el plano cartesiano. Por ejemplo, $A(3, 2)$ representa el siguiente punto azul:

Todo punto del plano tiene un par de coordenadas (x, y). La primera coordenada x se llama *ABSCISA*. La segunda coordenada **y** se llama *ORDENADA*. Recíprocamente, cada punto **P** en el plano cartesiano tiene un par de coordenadas (x, y).

Ejercicio 10.

Localiza en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son:

1. $(1, 2)$
2. $(-1, 4)$
3. $(5, 2.5)$
4. $(0, -3)$
5. $(6, 0)$
6. $(-2, -3/4)$

Ejercicio 11.

Dados los siguientes puntos en el plano, escribe cuáles son las coordenadas de cada uno.

1.6. *Distancia entre dos puntos en el plano*

Definición.

Sean $P(x_1, y_1), Q()x_2y_2$ dos puntos cualesquiera en el plano **XY**. Queremos determinar la distancia d entre estos dos puntos, es decir, la longitud del segmento **PQ**.
La distancia horizontal que hay entre **P** y **Q** es $PR = x_2 - x_1$ y la distancia vertical es $QR = y_2 - y_1$, éstos dos segmentos son los catetos del triángulo rectángulo **PQR** cuya hipotenusa es la distancia **PQ** que queremos hallar.
Por Teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{Pr}^2 + \overline{QR}^2$$

osea ;

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

asi que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La expresión anterior es la FÓRMULA PARA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. Puede escribirse también como

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Y sirve para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera, dadas sus coordenadas.

Ejemplo 7.

Hallar la distancia entre los puntos $A(-1, 2)yB(2, -2)$
Solución. Hagamos $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = -2$
Sustituyendo en la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d = AB = (2 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25 = 5$$

que es la distancia buscada.

Ejemplo 8.

Encontrar la distancia entre los puntos $P(-7, -3)yQ(5, 2)$.
Solución. Hagamos $x_1 = -7, y_1 = -3, x_2 = 5, y_2 = 2$
entonces

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(-7 - 5)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

En caso de obtener una raíz cuadrada no exacta, dejaremos indicado el radical.

Ejemplo 9.

¿Cuál es la distancia **MN** si **M** y **N** tienen coordenadas $M(-4, 7)yN(-1, 6)$?
Solución. Tenemos que $x_1 = -4, y_1 = 7, x_2 = -1, y_2 = 6$

$$d = \overline{MN} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (7 - 6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Ejercicio 12.

Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos. Haz un dibujo en el plano cartesiano para cada inciso.

1. $(5, 7), (3, 1)$
2. $(-6, 3), (2, -3)$
3. $(-4, -5), (3, 7)$
4. $(2, -1), (6, 1)$
5. $(-3, 5), (4, -2)$
6. $(-1, 6), (4, -2)$

1.7. *La circunferencia unitaria*

Definición.

Consideremos una circunferencia **C** con centro en el origen **O** del plano **XY** y radio igual a 1.
Si **P** es cualquier punto de **C** con coordenadas x, y, la distancia de **O** a **P** siempre será de 1 unidad y tendremos:

$$\overline{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad, obtendremos que:

$$x^2 + y^2 = 1$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA.

1.8. *Localización de puntos en C*

Definición.

Recordemos que el perímetro o la longitud de una circunferencia es el producto de π por su diámetro. Para el caso de la circunferencia unitaria $r = 1$ y nos queda que su longitud es:

$$C = r\pi$$

Esto nos servirá de guía para localizar algunos puntos en **C**.

Sea $A(1, 0)$ y consideremos que a partir de ese punto describiremos arcos de circunferencia al desplazarnos sobre **C**. Cada desplazamiento describe un arco α que será positivo si el desplazamiento es en sentido opuesto a las manecillas de un reloj, y negativo en caso contrario.
Cada arco α tiene como punto de partida al punto $A(1, 0)$ y como punto terminal, a un punto $P(\alpha)$, por lo que se suele escribir
$\alpha = AP = Longitud\ \ del\ \ arco\ \ AP$

Como la longitud de **C** es 2π , un arco de una revolución completa mide $\alpha = 2\pi$, y su punto terminal es $P(2\pi)$.

Similarmente podemos localizar los puntos $P(\pi)$ y $P(\frac{\pi}{2})$ pues $P(\pi)$ es el punto terminal del arco cuya longitud es π, osea, media revolución y $P(\frac{pi}{2})$ es el punto correspondiente a un cuarto de revolución.

El punto $A(1, 0)$ es el punto terminal de un arco de longitud cero. Con los puntos anteriores como referencia podemos localizar en forma aproximada cualquier otro punto $P(\alpha)$ en **C**.

Ejemplo 10.

Localizar el punto terminal de un arco de longitud $\frac{7\pi}{3}$
Solución. $\frac{7\pi}{3}$, y como π es la longitud de media circunferencia, dividimos cada mitad de la circunferencia en 3 partes iguales, cada una de las cuales tendrá longitud $\frac{\pi}{3}$
A partir de A, contamos 7 de estos arcos y llegamos a $P(7\frac{\pi}{3})$

Ejercicio 13.

Localizar del mismo modo los puntos:

1. $P(\frac{\pi}{4})$
2. $P(\frac{5\pi}{2})$
3. $P(\frac{-11\pi}{3})$

Ahora bien, recordemos que $\pi \approx 3.1416$, de modo que podemos también localizar puntos de la circunferencia unitaria dado el valor numérico de la longitud de su arco, teniendo en cuenta que:

$$\pi \approx 3.1416, \frac{\pi}{2} =\approx 1.5708$$

o gráficamente:

Ejercicio 14.

Localizar los puntos $P(4), P(9), P(-15), P(60), P(-10), P(2) y P(-14)$.

1.9. *Ejercicios y problemas*

1. Calcula la altura de una torre, si sabes que ésta proyecta una sombra de 10 m, al mismo tiempo que un árbol de 4 m de altura proyecta una sombra de 5 m.
2. En cada inciso, localiza en un plano cartesiano los dos puntos que se dan y calcula la distancia entre ellos.
   a) $(-3, 0)y(4, -3)$
   b) $(7, -8)y(-6, 4)$
   c) $(7, -2)y(4, -1)$
   d) $(1, -5)y(-9, 8)$
   e) $(-5, 1)y(3, 7)$
   f) $(-1, 0)y(0, -2)$
3. Resuelve los siguientes problemas.
   a) ¿Cuáles son el largo y el ancho respectivamente del rectángulo cuyos vértices son $P(-2, 4), Q(6, 4), R(6, 0)yS(-2, 0)$?
   b) ¿Cuál es la longitud del lado PQ en la figura siguiente?
   c) Los vértices de un triángulo isósceles están situados en $P(-8, 0), Q(0, 16)yR(8, 0)$. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados iguales?
   d) ¿Cuál es el área del cuadrado cuyos vértices son los puntos $F(2, 2), G(4, 0), H(4, 4)yJ(6, 2)$?
   e) Calcular la longitud de la diagonal PS en la siguiente figura.
4. Verificar en cada caso, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, si los puntos dados en cada inciso son colineales o no.
   a) $P(-2, 6), Q(6, 5, R(8, 4)$
   b) $A(-1, 1), B(2, 2), C(5, 3)$
   c) $M(-2, 2), N(4, 0), P(10, 2)$
5. Localizar aproximadamente los siguientes puntos en la circunferencia unitaria.
   a) $P(\frac{\pi}{3})$
   b) $P(\frac{-\pi}{6})$
   c) $P(\frac{3\pi}{4})$
   d) $P(\frac{-7\pi}{3})$

6. Haciendo $\pi = 3.1416$ localizar aproximadamente los siguientes puntos en la circunferencia unitaria.

   a)
   b) $P(7)$
   c) $P(-15)$
   d) $P(-5)$
   e) $P(32)$
   f) $P(-4)$
   g) $P(9)$