Cimientos Matemáticos

Módulo 9: Funciones circulares

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

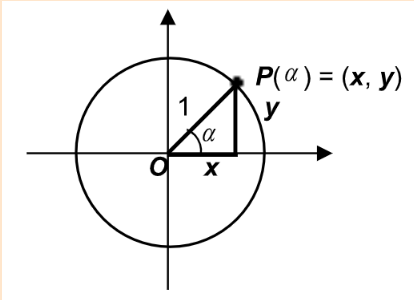
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. *Modulo 9. Funciones Circulares*

1.1. *Definición de las funciones circulares*

Definición.

Sea $\mathbf{P}(\alpha)$ un punto sobre $\mathbf{C}$. Ya hemos visto que $\mathbf{P}(\alpha)$ es el punto terminal del arco cuya longitud es $\widehat{AP}=\alpha$



El punto $\mathbf{P}$ tiene coordenadas (x, y), que son las distancias horizontal y vertical de $\mathbf{O}$ a $\mathbf{P}$, respectivamente.

Notemos que x y y son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $r = 1$ (por ser el radio de la circunferencia unitaria) y en función de estos datos podemos obtener *las funciones trigonométricas o funciones circulares* de α

Definición.

1. $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$
2. $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$
3. $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
4. $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
5. $\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$
6. $\csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$

Éstas definiciones habrá que tenerlas muy presentes a lo largo de todo nuestro estudio, pues representan la base de todos los cálculos trigonométricos que haremos. Las ecuaciones (1) y (2) nos muestran que si $P(x, y)$ es un punto sobre $\mathbf{C}$ cuyo arco (o ángulo) asociado es α , entonces

$$x = cos\alpha$$

$$y = \sin\alpha$$

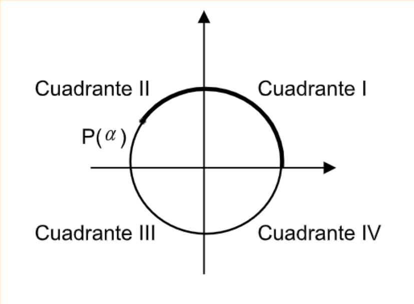
Así que podemos escribir las coordenadas x, y de $P(x, y)$ como $P(cos\alpha, \sin\alpha)$ Las otras 4 funciones pueden definirse en términos de $\sin\alpha, cos\alpha$.

Veamos también que las tres últimas funciones circulares son las funciones recíprocas de las tres primeras, a saber: el seno y la cosecante son recíprocas, del mismo modo que el coseno y la secante, y la tangente con la cotangente.

1.1.1. *Signos de las funciones circulares en los cuatro cuadrantes*

Definición.

Analicemos qué signo adquieren las funciones $\sin\alpha, cos\alpha, \tan\alpha$, de acuerdo al cuadrante en que se localice el punto $P(\alpha)$. Para esto recordamos que los cuadrantes en el plano se numeran como sigue:



Definición.

La tabla siguiente muestra el signo correspondiente a cada función en cada uno de los cuatro cuadrantes.

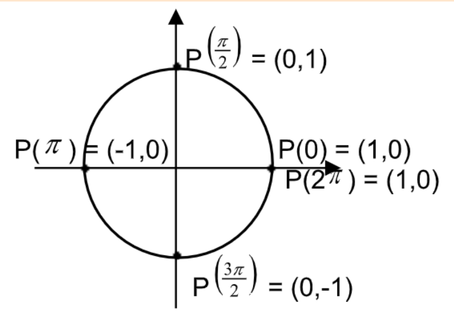
Cuadrante en que se localiza $P(\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
I	$+$	$+$	$+$
II	$+$	$-$	$-$
III	$-$	$-$	$+$
IV	$-$	$+$	$-$

1.2. *Valores de las funciones circulares de $\frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos*

Definición.

Determinaremos ahora los valores de las funciones circulares de algunos valores de α. Para ello haremos uso de algunas situaciones geométricas, por lo que es importante aquí el trazar bien las gráficas.

Ya sabemos, que las coordenadas x, y de cualquier punto **P** de la circunferencia unitaria nos proporcionan los valores de $cos\alpha$ y de $\sin\alpha$ respectivamente, por lo que para determinar el valor de estas y de las demás funciones circulares, el problema será primeramente el de determinar cuáles son las coordenadas del punto P. Empezaremos determinando las funciones de $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Esto es sencillo de hacer, pues las coordenadas de estos puntos terminales son conocidas y se muestran en la siguiente gráfica.



El punto $P(0)$ coincide obviamente con el punto $P(2\pi)$.

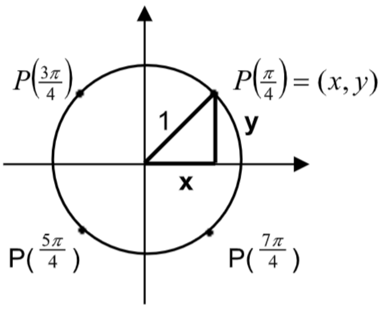
Definición.

Ahora, usando que si las coordenadas de $P(\beta)$ son $x = cos\beta, y = \sin\beta$, obtenemos la siguiente tabla, con las funciones circulares de cada uno de estos números.

β	$P(x,y)$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
0	$(1,0)$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	1	0
π	$(-1,0)$	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$	-1	0
2π	$(1,0)$	0	1

1.3. *Valores de las funciones circulares de $\frac{\pi}{4}$ y sus múltiplos*

Localicemos el punto $P(\frac{\pi}{4})$ sobre la circunferencia unitaria, y para determinar sus coordenadas (x,y) observemos en la figura que en este caso se tiene $x = y$.



como x, y son los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $r = 1$, tenemos por teorema de Pitágoras que:

pero como $x = y \implies x^2 + y^2 = 1^2$. Osea $x^2 + x^2 = 1$, y despejando x, obtenemos $2x^2 = 1$, y despejando x, obtenemos $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, para racionalizar, escribimos $x = \sqrt{\frac{2}{4}} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto, las coordenadas de $P(\frac{\pi}{4})$ son $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, y tenemos ya los valores de $\sin\frac{\pi}{4}$ y $cos\frac{\pi}{4}$. Las coordenadas de $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ serán iguales que las obtenidas, variando únicamente en el signo.

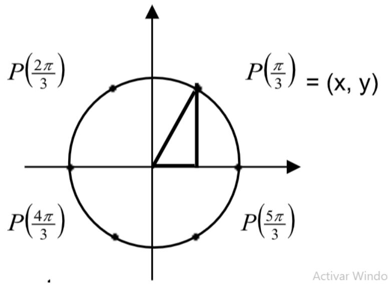
Aunque los múltiplos de $\frac{\pi}{4}$ son $\frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, y las funciones de $\frac{2\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}$, ya las calculamos en la sección anterior, pues $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{4} = \pi, \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, así que no hace falta volverlas a considerar.

β	$P(x,y)$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{-2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3})$	$\frac{\sqrt{2}}{-2}$	$\frac{\sqrt{2}}{-2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3})$	$\frac{\sqrt{2}}{-2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.4. *Valores de las funciones circulares de $\frac{\pi}{3}$ y sus múltiplos*

En este caso, localizamos el punto $P(\frac{\pi}{3})$ en la circunferencia unitaria, cuyas coordenadas (x,y) no conocemos, pero por la geometría de la figura se ve claramente que $x = 1/2$.

β	$P(x,y)$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Nuevamente por Teorema de Pitágoras, tenemos que:$x^2 + y^2 = 1$, como $x = 1/2 \implies (1/2)^2 + y^2 = 1 \implies 1/4 + y^2 = 1$, despejando $y : \implies y^2 = 3/4 \implies y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las coordenadas de $P(\frac{\pi}{3})$ son entonces $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ Falta determinar ahora las coordenadas de $P(\frac{2\pi}{3}), P(\frac{4\pi}{3}), P(\frac{5\pi}{3})$, pero en realidad, lo único que varía son los signos, así que podemos construir la tabla correspondiente con los valores de las funciones.

1.5. *Valores de las funciones circulares de $\frac{\pi}{6}$ y sus múltiplos*

La deducción de las coordenadas de $P(\frac{\pi}{6})$, es prácticamente la misma que la que hicimos para $P(\frac{\pi}{3})$.

β	$P(x,y)$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

En este caso, observemos que $y = 1/2$, así que valiéndonos nuevamente del Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$x^2 + (1/2)^2 = 1$$

despejando x, del mismo modo que lo hicimos para y, en el párrafo anterior, obtenemos que

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

así que las coordenadas de $P(\frac{\pi}{6})$ son $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Y los demás valores quedan como sigue:

Con los valores obtenidos en las cuatro tablas anteriores, podemos obtener el valor de todas las funciones circulares de éstos números, usando las definiciones de cada una de las seis funciones circulares y sustituyendo los valores exactos.

Ejemplo 1.

Hallar el valor de todas las funciones circulares de $\frac{5\pi}{3}$
Solución. Sabemos que $\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ y $\cos = \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, así que las demás funciones son:

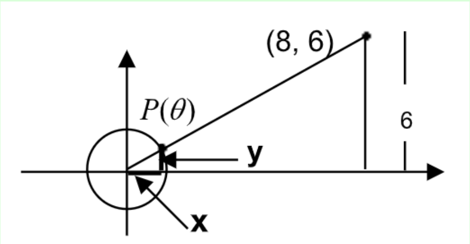
1. $\tan = \frac{5\pi}{3} = \frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$
2. $\sec\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
3. $Cot\frac{5\pi}{3} = \frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
4. $\csc\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

1.6. *Dado el valor de una de las funciones circulares, hallar el valor de todas las restantes*

En seguida daremos unos ejemplos de problemas que ilustran como hacer esto.

Ejemplo 2.

Si el punto $P(\theta)$, está localizado en la intersección de la circunferencia unitaria, con el segmento de recta que une al origen $(0,0)$ con el punto $(8,6)$. Encontrar el valor de todas las funciones circulares de θ.
*Solución.*En la figura se muestra la situación descrita.



Nuestra circunferencia unitaria se ve chiquita en la gráfica, por la escala que hemos empleado, y alcanzamos a distinguir que la x y la y del punto $P(\theta)$ son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $r = 1$. Éste pequeño triangulito rectángulo es semejante al triángulo más grande cuyos catetos miden 8 y 6, y cuya hipotenusa es el segmento de $(0,0)$ a $(8,6)$.

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, encontramos que dicha hipotenusa es:

$$\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

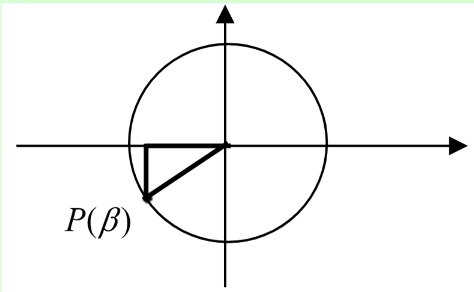
Ejemplo 2cont.

Por triángulos semejantes podemos escribir que: $\frac{x}{1} = \frac{8}{10}$ y tambien $\frac{y}{1} = \frac{6}{10}$, De donde se obtiene que $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$, y por lo tanto:

- $\sin\theta = \frac{3}{5}$
- $\cos\theta = \frac{4}{5}$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$
- $\cot\theta = \frac{cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$
- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$
- $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

Ejemplo 3.

Calcula el valor de todas las funciones circulares de β, si $\cos\beta - \frac{4}{5}$ y el punto $P(\beta)$ esta en el tercer cuadrante.



Solución. El coseno tiene en este caso, signo negativo, lo cual significa que P podría estar o bien en el cuadrante II o en el cuadrante III, (pues el coseno es la x). Nos dicen que **P** está en el tercer cuadrante.

De las coordenadas (x, y) del punto **P**, conocemos la $x = -4/5$, y encontramos y, usando que $x^2 + y^2 = 1$.

$$(-\frac{4}{5})^2 + y^2 = 1 \implies \frac{16}{25} + y^2 = 1 \implies y = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

El signo será + ó - dependiendo del cuadrante en que se localiza P, y como en este caso estamos en el 3°, la y es de signo -, es decir $y = -\frac{3}{5}$. Asi que $\sin\beta = -\frac{3}{5}, cos\beta = -\frac{4}{5}$
las demás funciones las encontramos fácilmente con las definiciones de las funciones circulares, queda como ejercicio completar esto.

Ejercicio 1.

Encontrar (en caso de existir) el valor exacto de:

1. $\cos 2\pi$
2. $\cot 3\pi/2$
3. $\sin 2\pi$
4. $\tan \pi/2$
5. $\cos 3\pi/2$
6. $\cot \pi$
7. $\sec \pi$
8. $\csc \pi/2$
9. $\csc 3\pi/2$
10. $\tan 0$
11. $\cos 5\pi/4$
12. $\csc 5\pi/6$
13. $\sec 7\pi/4$
14. $\cot 2\pi/3$
15. $\sec \pi/4$
16. $\cos 7\pi/6$
17. $\cot \pi/2$
18. $\csc 4\pi/3$
19. $\tan \pi/6$
20. $\cot 7\pi/4$
21. $\csc 7\pi/6$
22. $\sec 5\pi/4$
23. $\sin 11\pi/6$
24. $\cos 5\pi/6$

Ejercicio 2.

Hacer un dibujo para cada uno de los siguientes problemas y resolverlos.

1. Si $P(7\pi/6) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, dterminar el valor de $\sin 7\pi/6$
2. Si $P(7\pi/6) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, determina el valor de $\cot 7\pi/6$
3. Si $P(\beta) = (\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{1}{3})$, determina el valor de $\tan\beta$

1.7. *Identidades trigonométricas*

Lo que nos queda por ahora es adquirir habilidad con las expresiones trigonométricas. En ésta sección veremos algunas identidades básicas y resolveremos algunos ejercicios para practicar su uso.

1.7.1. *Identidades fundamentales*

Definición.

Iniciamos recordando que para todo punto $P(\alpha)$ sobre la circunferencia unitaria, con coordenadas $x, y, x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$. Y como siempre se cumple por Teorema de Pitágoras que $x^2 + y^2 = 1$, se tiene que:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ahora, si dividimos la igualdad anterior entre $\sin^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Y recordando que $\cot\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$ y que $\csc\alpha = 1/\sin\alpha$, nos queda

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

De manera similar, si la igualdad (IF-1) se divide ahora entre $\cos^2\alpha$, resulta

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Las tres identidades anteriores, forman parte del grupo conocido como identidades pitagóricas (pues provienen de la aplicación directa del teorema de Pitágoras). Las identidades fundamentales se clasifican en tres grupos: a) Pitagóricas, b) de cocientes y c) de recíprocos.

Definición

- Pitagoricas
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$
- $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
- De cocientes
- $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$
- $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$
- De Reciprocos
- $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
- $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Las identidades de cocientes y las de recíprocos, no son sino las mismas definiciones de las funciones circulares.

Ahora, un buen ejercicio es escribir cada una de las funciones circulares, en términos de las demás.

Ejemplo 4.

Escribir todas las funciones circulares, en términos de $\cos\alpha$.
Solución. Comenzamos por $\sin\alpha$. De la identidad $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, despejamos $\sin\alpha$ y tenemos: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

Para $\tan\alpha$, tenemos que por definición, $\tan\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, y como ya vimos $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, entonces: $\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

Y las otras tres funciones, son las recíprocas de las que ya conocemos:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$

Ejemplo 5.

Escribir las funciones circulares en términos de $\sec^2\alpha$

Solución. De la identidad $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obtenemos que $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, pero como $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$, se tienen que $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$, así que *reemplazando* esto en $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, se tiene que:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2\alpha}}$$

Haciendo la suma dentro de la raíz

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{\sec^2\alpha-1}{\sec^2\alpha}}$$

Y por ley de los radicales:

$$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec^2\alpha}$$

Para el coseno ya vimos que:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$$

Y las demas funciones;

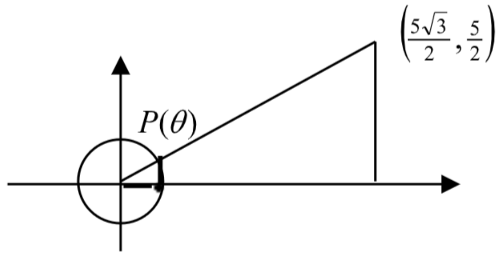
$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$$

$$\cot\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$$

$$\csc\alpha=\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$$

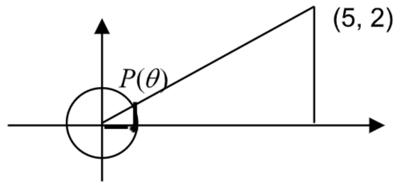
1.8. Ejercicios y problemas.

1. Encuentra las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos.
   a) $P(2/3\pi)$
   b) $P(9/4\pi)$
   c) $P(7/6\pi)$
   d) $P(11/4\pi)$
2. Dadas las coordenadas, encontrar el valor de la función trigonométrica que se pide en cada caso.
   a) Si $P(1/2,0)$hallar $\sec\alpha$
   b) Si $P(5\sqrt{3}/2,5/2)$, hallar $\tan\theta$
   c) Si $P(8/3\pi)=(-1/3,\sqrt{3}/2)$, determinar el valor $Ctg\frac{8\pi}{3}$
   d) Si $P(\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2},1/2)$, determinar el valor de $\sec\frac{pi}{6}$
   e) Si $P(\frac{\pi}{3})=(1/2,\frac{\sqrt{3}}{2})$, determina el valor de $\csc\frac{pi}{3}$
3. Resuelve los problemas siguientes.
   a) De acuerdo con la figura siguiente, ¿cuál es el valor de $\tan\theta$?



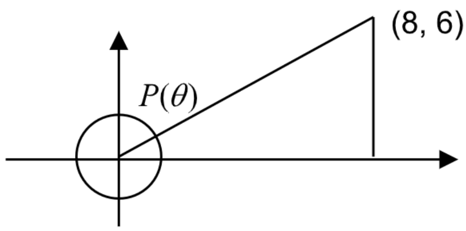
b) Si $P(\theta)$ esta en el tercer cuadrante y el valor de $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$, ¿ cual es el valor de $\tan\theta$?

c) Observa la siguiente figura. De acuerdo con sus datos, cuál es el valor de $\csc\theta$



d) Si la funcion $\sin\theta = -3/\sqrt{34}$, y el punto terminarl $P(\theta)$ queda localizado en el tercer cuadrante, ¿Cual es el valor de la función $\cos\theta$?

e) Observa la figura. De acuerdo a sus datos, ¿cuál es el $\sin\theta$?

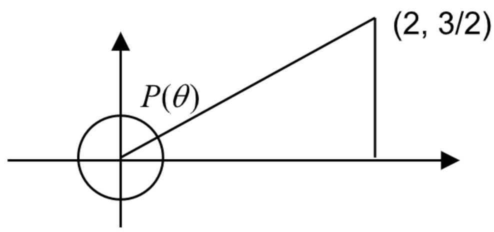


f) Si $\tan\theta = 4/3$ y $P(\theta)$, esta situado en el tercer cuadrante, ¿Cuanto vale $\cos\theta$?

g) ¿Cuál es el valor de $\sin\theta$ si $\cos\theta = -4/5$ y $P(\theta)$ esta en el tercer cuadrante ?

h) La recta que une al origen con el punto $(4, 1)$ interseca a la circunferencia unitaria en el punto $P(\theta) = (4/17, 1/17)$ Determina el valor exacto de la función $\tan\theta$

i) Observa la figura siguiente. De acuerdo con sus datos ¿cuánto vale $\csc\theta$



j) Si $\csc\theta = -2/3$ y el punto terminal $P(\alpha)$ esta en el segundo cuadrante, ¿Cual es el valor exacto de de la función $\cot\alpha$?

k) Si $\tan\theta = -3/4$ y el arco θ tiene su punto $P(\theta)$ en el cuarto cuadrante, determinar el valor exacto de $\cos\theta$

4. Indica cuáles de las siguientes expresiones son identidades trigonométricas fundamentales.

a) $\tan^2\alpha - 1 = \sec^2\alpha$

b) $\sin^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha$

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

d) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 1$

e) $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

f) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

5. Verifica cuáles de las siguientes expresiones son correctas.

   a) $\sin\alpha\cos\alpha = 1$

   b) $\cos\alpha\csc\alpha = 1$

   c) $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

   d) $\sin\alpha\csc\alpha = 1$

6. Indica cuál de las siguientes, es una expresión equivalente a $\sin\alpha$

   a) $\frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$

   b) $\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$

   c) $\cot\alpha \cdot \sin\alpha$

   d) $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

7. Resuelve los problemas propuestos.

   a) Expresar $\cos\alpha$ en terminos de $\csc\alpha$

   b) Expresar $\cot\alpha$ en terminos de $\csc\alpha$

   c) Expresar $\tan\alpha$ en terminos de $\sin\alpha$

   d) Expresar $\sec^2\alpha$ en terminos de $\cot\alpha$

   e) Expresar $\tan^2\alpha$ en terminos de $\sin^2\alpha$