Cimientos Matemáticos

Módulo 10: Funciones circulares de suma y diferencias

Erick Paulí Pérez Contreras

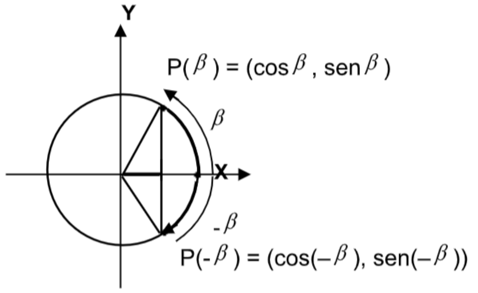
Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 10. *FUNCIONES CIRCULARES DE SUMAS Y DIFERENCIAS*

1.1. Funciones de $-\beta$ en terminos de β

Analicemos con cuidado la figura siguiente, en la que se muestra un punto $P(\beta)$, correspondiente a un arco β, y el punto $P(-\beta)$.



Definición.

Sabemos que las coordenadas x, y del punto $P(\beta)$ son $(\cos\beta, \sin\beta)$, y de las coordenadas de $P(-\beta)$ son $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$. De la figura se obtienen las siguientes identidades:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$

y así, las otras funciones quedan como

$$\tan(-\beta) = -\tan\beta$$

$$\cos(-\beta) = -\cot\beta$$

$$\sec(-\beta) = \sec\beta$$

$$\csc(-\beta) = -\csc\beta$$

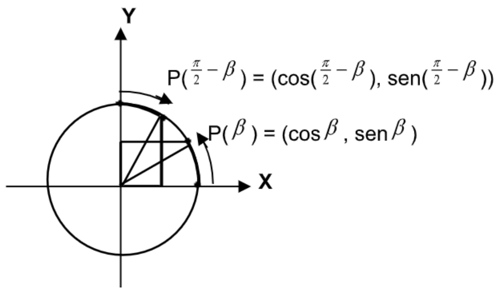
1.2. *Propiedad de las cofunciones*

Definición.

Cada función circular tiene una *co-función.* La *cofunción* del seno es el coseno, la *cofunción* de la tangente es la cotangente y para la secante es la cosecante. De ahí que se nombren con el prefijo “co”.

Cada función está relacionada con su cofunción de modo que toda función circular de β es igual a la cofunci'on de $\pi/2 - \beta$

Lo anterior puede verse en la figura siguiente.



Si β es el arco descrito al desplazar P desde $A(1,0)$ hasta β en sentido positivo, entonces $\pi/2-\beta$ es el arco que se obtiene al restarle β a $\pi/2$.Notemos que β y $\pi/2-\beta$ tienen la misma longitud de arco, y de la figura observamos que la x del punto $P(\beta)$ es igual a la ordenada del punto $P(\pi/2-\beta)$, y la ordenada de $P(\beta)$, es igual a la abscisa de $P(\pi/2-\beta)$, es decir

Definición.

1. $\sin\beta = \cos(\pi/2-\beta)$
2. $\cos\beta = \sin(\pi/2-\beta)$
3. $\tan\beta = \cot(\pi/2-\beta)$
4. $\cot\beta = \tan(\pi/2-\beta)$
5. $\sec\beta = \csc(\pi/2-\beta)$
6. $\csc\beta = \sec(\pi/2-\beta)$

Con éstas propiedades podremos escribir algunas expresiones en términos de otras más sencillas.

Ejemplo 1.

Escribir $\sec(\pi+\beta)$, como una función en terminos de β

Solución. $\sec(\pi+\beta) = \sec(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\beta)$. Escribimos $\pi+\beta$ como $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\beta$

$\sec(\frac{\pi}{2}-(-(\frac{\pi}{2}+\beta)))$. Esto por $a+b=a-(-b)$

$\csc(-(\frac{\pi}{2}+\beta))$. Por la propiedad de las cofunciones.

$-\csc(\frac{\pi}{2})+\beta$. Pues $\csc(-\beta) = -\csc\beta$

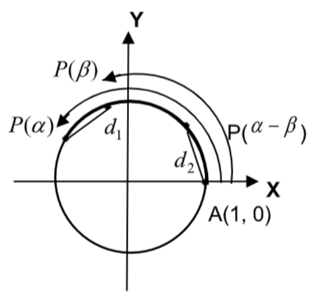
$-\csc(\frac{\pi}{2}-(-\beta))$. Por $a+b=a-(-b)$

$-\sec(-\beta)$. Propiedad de las cofunciones.

$= -\sec\beta$. Recordemos que $\sec(-\beta) = \sec\beta$

1.3. *Seno, coseno y tangente de sumas y diferencias*

Deduciremos una identidad para el coseno de la diferencia de dos números, y veremos pueden deducirse de ésta unas identidades análogas para el seno y la tangente.
Sea $P(\alpha), P(\beta)$ los puntos terminales de los arcos α, β, respectivamente mostrados en la figura.



El arco $\alpha-\beta$, es el arco cuya longitud es la diferencia de α y β, marcamos su punto terminal $P(\alpha-\beta)$

Las coordenadas de cada uno de estos puntos pueden escribirse como;

$$P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$P(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)$$

$$P(\alpha - \beta) = (\cos\alpha - \beta, \sin\alpha - \beta)$$

Ahora, notemos que el segmento que une $P(\alpha)$ con $P(\beta)$, es igual en longitud al segmento que une a $A(1, 0)$ con $P(\alpha - \beta)$. Si denotamos éstos segmentos como d_1, d_2 tendremos por la fórmula de la distancia entre dos puntos que

$$d_1 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 1)^2}$$

Pero como 1d = 2d

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 1)^2}$$

Si elevamos al cuadrado

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 1)^2$$

Desarrollando, nos queda:

$$\underline{\cos^2\alpha} - 2\cos\alpha\cos\beta\overline{\cos^2\beta} + \underline{\sin^2\alpha} - 2\sin\alpha\sin\beta\overline{\sin^2\beta} = \cos\widehat{^2(\alpha -}\beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin\widehat{^2(\alpha -}\beta)$$

Y como $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos simplificar los terminos que estan marcados, obteniendo

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

De donde obtenemos

Definición.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Podemos obtener la expresión para el coseno de una suma haciendo $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$ y usando la ecuacion (1)

Definición.

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Para obtener expresiones para el seno de una suma o diferencia, usamos que
$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta))$, por la propiedad de cofunciones

$= \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$ agrupando de una manera distinta

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin\beta$ Usando la expresion (1)

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ por la propiedad de cofunciones.

Definición.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Haciendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, obtenemos de lo anterior que

Definición.

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Obtengamos ahora, expresiones para la tangente de una suma y tangente de una diferencia.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Definición.

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

Similarmente, puede obtenerse

Definición.

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

1.4. *Funciones circulares del doble de un número*

Ejercicio 1.

Demostrar las siguientes identidades.(Sugerencia: hagase $2\alpha = \alpha + \alpha$)

1. $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1.5. *Transformación de productos a sumas y viceversa*

Definición.

Productos a sumas

1. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
3. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
   Suma a producto. Si hacemos $\alpha+\beta = \theta, \alpha-\beta = \omega$
   $\alpha = \frac{\theta+\omega}{2}, \beta = \frac{\theta-\omega}{2}$
   Si sustituimos estos valores en las 3 identidades Pasadas tenemos
4. $\sin\theta + \sin\omega = 2\cdot\sin\alpha\frac{\theta+\omega}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\omega}{2}$
5. $\sin\theta - \sin\omega = 2\cdot\cos\alpha\frac{\theta+\omega}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\omega}{2}$
6. $\cos\theta + \cos\omega = 2\cdot\cos\alpha\frac{\theta+\omega}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\omega}{2}$
7. $\cos\theta - \cos\omega = 2\cdot\sin\alpha\frac{\theta+\omega}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\omega}{2}$

1.6. Ejercicios y problemas

1. Escribir las siguientes funciones en términos de su cofunción.

    a) $\cos(\pi/2 - 8)$
    b) $\cos(\pi/2 - \beta)$
    c) $\tan(\pi/2 - 10)$
    d) $\cot(\pi/2 - 68)$
    e) $\sin n\sqrt{8}$

2. Escribir las funciones siguientes en términos de β

    a) $\tan(-\beta)$
    b) $\sec(-\beta)$
    c) $\sin(-\beta)$
    d) $\csc(-\beta)$
    e) $\cos(-\beta)$
    f) $\cot(\pi/2 + \beta)$
    g) $\csc(\pi/2 - \beta)$
    h) $\sec(\pi - 8)$

3. Encuentra el valor exacto de:

    a) $\sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$
    b) $\sin(2 + \sqrt{3})$
    c) $\sin(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4})$
    d) $\sin(\sqrt{7} + \pi)$

4. Desarrolla las siguientes expresiones y sustituye los valores exactos de las funciones.

    a) $\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$
    b) $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$
    c) $\cos(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3})$
    d) $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{2})$
    e) $\cos(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{6})$
    f) $\cos(\frac{11\pi}{63} - \frac{2\pi}{3})$
    g) $\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$
    h) $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})$
    i) $\sin(\frac{\pi}{6} + \theta)$
    j) $\sin(\frac{5\pi}{12})$
    k) $\sin(\frac{5\pi}{12} + \theta)$
    l) $\cos(\frac{5\pi}{6} + \theta)$
    m) $\sin(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})$
    n) $\tan(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{4})$
    ñ) $\tan(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$
    o) $\tan(\frac{5\pi}{63} + \frac{\pi}{4})$
    p) $\tan(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$
    q) $\tan(\frac{4}{3} + \frac{1}{4})$
    r) $\cot(3\pi - \theta)$

5. Escribe las funciones siguientes como funciones de un número $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

    a) $\cos 12.43$

b) $\sin(9.1309)$
c) $\sin 8$
d) $\sin(8.1763)$
e) $\sin(\frac{8\pi}{3})$
f) $\cos(9.5213)$

6. Encuentra el valor de las funciones circulares que se piden.

   a) Si $\cos\alpha = -4/5$ y el punto terminal $P(\alpha)$ está en el segundo cuadrante. Encontrar $\sin(2\alpha)$
   b) Si $\sin\alpha = 4/5$ está en el segundo cuadrante. Encuentra el valor de $\cos 2\alpha$
   c) Si $\sin\alpha = 3/5, P(\alpha)$ está en el primer cuadrante. Encuentra el valor de$\cos 2\alpha$
   d) Dado que $\sin\alpha = -3/5, P(\alpha)$ está en el tercer cuadrante. ¿Cuál es el valor de $\tan(2\alpha)$?
   e) Si $\cos\alpha = -5/13, P(\alpha)$ está en el tercer cuadrante. Encontrar $\sin 2\alpha$
   f) Si $\tan\alpha = 3/4$ y el punto terminal $P(\alpha)$ está en el primer cuadrante, calcula el valor de $\tan(\frac{\alpha}{2})$

7. Cambia las expresiones, escribiendo el producto como suma, y las sumas como productos.

   a) $\sin 5\theta + \sin 15\theta$
   b) $\cos 17\theta + \cos 5\theta$
   c) $\sin 5\theta + \sin 3\theta + \sin 1\theta + \sin 9\theta$
   d) $\sin 8\theta \sin 4\theta$
   e) $\cos 5\theta \sin 6\theta$
   f) $\sin \frac{3\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{3}$