Cimientos Matemáticos

Módulo 11: Ecuaciones de la línea recta

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 11. *ECUACIONES DE LA LÍNEA RECTA*

1.1. *Lugares geométricos y ecuaciones*

En este módulo, echaremos un vistazo a algunas ideas clásicas de la geometría analítica. Hoy en día hay muchas ramas de la geometría en constante crecimiento y que aportan mucho al desarrollo científico y tecnológico. La geometría analítica a la que hacemos referencia en éste libro es la que históricamente se encargó de desarrollar el estudio de las llamadas *curvas* cónicas a través de sus ecuaciones. La razón del por qué se llaman cónicas se hará evidente en la medida que resuelvas el ejercicio 1 de éste módulo.

Nota.

A grandes rasgos podríamos pensar que ésta geometría se encarga de estudiar dos problemas fundamentales:

1. Dada una ecuación (en dos variables) vamos a interpretarla geométricamente, es decir, dibujar su gráfica en el plano cartesiano.
2. Dada una figura geométrica en el plano cartesiano, determinar cuál es su ecuación.

Estos problemas son esencialmente inversos uno del otro. Vamos a concentrarnos en el primero de ellos. Hasta este momento ya te has encontrado con ecuaciones como las siguientes:

$$x + 2 = 5 \qquad 2x + 3 = 11 \qquad x^2 + 1 = 10$$

Resolverlas significa encontrar los valores de la variable que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo en la primera la solución es $x = 3$, en la segunda $x = 4$ y en la última existen dos valores solución ya que se trata de una ecuación de segundo grado: $x = 3$ y $x = -3$.

Nota.

Cuando la ecuación tiene dos variables existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo en la ecuación $x + y = 7$

algunas soluciones son los siguientes pares ordenados: $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)y(5, 0)$.

En cada par ordenado el primer valor corresponde a x y el segundo valor corresponde a y.

Por supuesto que puede haber valores negativos:$(-1, 6), (-2, 7), (3, -8), (-5, 10)$, etcétera

Y también valores con decimales o fracciones: $(2.3, 2.7), (0.8, 4.2), (6.49, -1.49), ()$, etcétera

Como ves, hay un número infinito de soluciones de la ecuación x + y = 5.

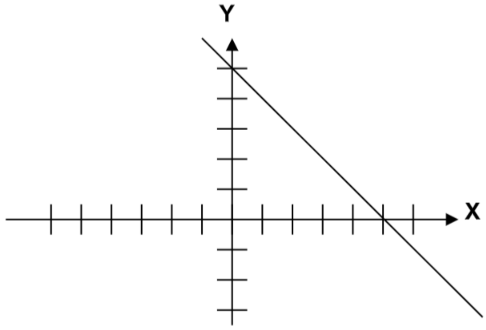
¿Cómo podemos estudiar la solución de este tipo de ecuaciones? Como veremos a lo largo de este módulo, una buena manera de estudiarlas es utilizando la geometría. Para ello necesitamos entender la relación que existe entre las soluciones de ecuaciones y los objetos geométricos tales como la línea recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Todas estas son *curvas* denominadas *secciones cónicas* ya que aparecen como resultado de cortar un cono de diferentes maneras. Puedes buscar en internet material acerca de las *secciones cónicas* y ayudarte a visualizar cómo se ven.

Ejercicio 1.

Investiga en internet y haz un dibujo de cada una de las siguientes secciones cónicas explicando el tipo de corte que hay que hacerle a un cono para obtenerla.

1. La línea recta
2. La circunferencia.
3. La parábola.
4. La elipse.
5. La hipérbola

Por ejemplo, la ecuación $x + y = 5$ puede representarse geométricamente por medio de la siguiente línea recta:



Si observas cuidadosamente verás que cada punto de la recta corresponde a una solución de la ecuación; por ejemplo el $(0, 5)$, el $(2, 3)$ y el $(5, 0)$. Cualquier punto que tomes sobre la recta tiene un par de coordenadas x, y que satisfacen la ecuación $x + y = 5$.

Las siguientes definiciones serán muy importantes en nuestro estudio.

Definición.

Dada una ecuación en dos variables, llamaremos *gráfica de la ecuación* al dibujo formado por todos los puntos del plano que satisfagan dicha ecuación.

Definición.

Dada una ecuación en dos variables, cualquier punto cuyas coordenadas la satisfacen diremos que *pertenece a la gráfica de la ecuación*.

Ejercicio 2.

Considérese la ecuación $x - y = 2$. Escríbanse cinco soluciones de la ecuación en forma de pares ordenados (x, y) y localícense los puntos en el plano cartesiano. Traza la recta que pasa por esos puntos.

Ejercicio 3.

Trazar la gráfica de la ecuación $x + y = 7$.

Definición.

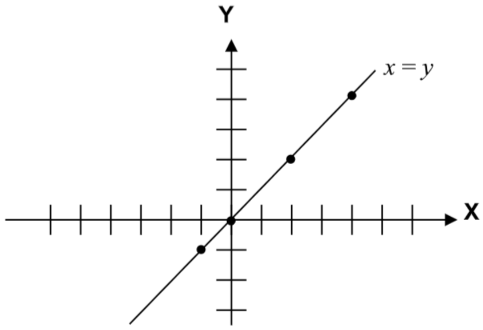
Un *lugar geométrico es un dibujo que consta de puntos en el plano cartesiano que cumplen ciertas condiciones.*

Ejemplo 1.

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya primera coordenada es igual a su segunda coordenada? Algunos puntos que cumplen la condición son:

$$(5, 5), (3, 3), (7, 7), (-1, -1), (0, 0)$$

Existe un número infinito de pares de coordenadas que cumplen la condición. Esta condición puede ser expresada mediante la ecuación x = y. Como viste en la sección anterior, podemos representar esa ecuación por medio de una gráfica en el plano cartesiano.



Ejemplo 2.

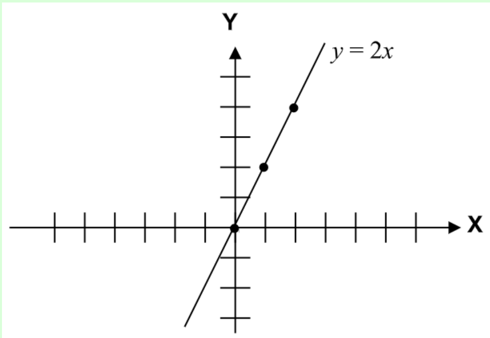
¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya segunda coordenada es el doble de su primera coordenada?

¿Cómo podemos representar este enunciado con una ecuación? **Variables X = 1 coordenada , Y = 2da coordenada** entonces $y = 2x$

Veamos algunos puntos que cumplen la ecuación:

$$(2,4),(3,6),(5,10),(4,8),(1,2),(-7,-14),(-6,-12),(0,0),(-5,-10)$$

Esta ecuación tiene una infinidad de soluciones, por lo que no es posible enumerarlas todas.
Para estudiar estas ecuaciones podemos hacer un dibujo de su gráfica.



Ejemplo 3.

El lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que $y = 2x + 1$.
Algunos puntos que satisfacen la ecuación son:
Para calcularlos podemos asignar algún valor a x, por ejemplo x = -1 y sustituirlo en la ecuación $y = 2x + 1$:

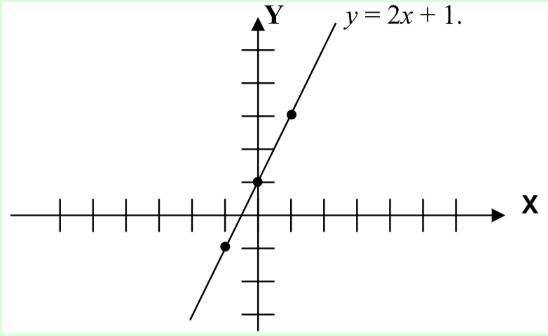
$$Six = -1, y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \implies (-1,-1)$$

$$Six = 0, y = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \implies (0,1)$$

$$Six = 5, y = 2(5) + 1 = 10 + 1 = 11 \implies (5,11)$$

Ejemplo 3cont.

Si graficamos estos puntos en el plano cartesiano, obtenemos la siguiente gráfica:



Ejercicio 4.

Localiza en un plano cartesiano los conjuntos de puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

1. $y = 3x + 2$
2. $y = -x + 1$
3. $y > x$
4. $2x + y = 8$
5. $x + y = 2$
6. $y = 3$
7. $x = -2$

1.2. *Forma general de la ecuación de la línea recta*

Analizados los ejemplos anteriores, pasaremos a formalizar lo anterior estableciendo la siguiente:

Definición.

Una ecuación lineal o de primer grado, con dos variables x, y es toda ecuación que pueda escribirse en la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B, C, son constantes tales que A y B no sean ambas cero.

La ecuación $Ax + By + C = 0$ es llamada *la forma general de la ecuación lineal* y cualquier ecuación lineal con dos variables puede escribirse en esa forma, por ejemplo:

- La ecuación $x + y = 5$ del ejemplo 1 puede escribirse como: $x + y - 5 = 0$. De este modo queda en la forma general donde $A = 1, B = 1yC = -5$.
- La ecuación $2x - y = 1$ del ejemplo 2 puede escribirse como $2x - y - 1 = 0$. En éste caso se tiene $A = 2, B = -1yC = -1$.
- La ecuación $3(x + y) - 2 = y - 5$ es una ecuación lineal, pues es posible escribirla como: $3x + 3y - 2 - y + 5 = 0$. Si reducimos los términos semejantes tenemos: $3x + 2y + 3 = 0$, donde $A = 3, B = 2yC = 3$.

Ya hemos visto que la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta, donde cada punto es una solución de la ecuación. Cada ecuación lineal tiene una infinidad de soluciones, por lo que no nos es posible en listarlas todas. *La recta es una gráfica del conjunto solución de la ecuación y también tiene entonces una infinidad de puntos.*

No olvidemos que solución de una ecuación es en este caso cualquier par ordenado de números (x, y) que satisfacen la igualdad. Por ejemplo $(0, -4)$ es una solución de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$, ya que al hacer $x = 0, y = -4$ tenemos:

$$2(0) - 3(-4) - 12 = 0 \implies 0 + 12 - 12 = 0 \implies 0 = 0$$

por lo que vemos, éstos números sí satisfacen la ecuación.
Ahora bien, una línea recta queda determinada si se conocen al menos dos de sus puntos, por lo que basta entonces con conocer dos soluciones de la ecuación y graficar la recta que pase por esos dos puntos.

Ejemplo 4.

Graficar la ecuación lineal $2x - 3y - 12 = 0$.

*Solución.*Encontremos dos soluciones. Por simplicidad hagamos $x = 0$, entonces:

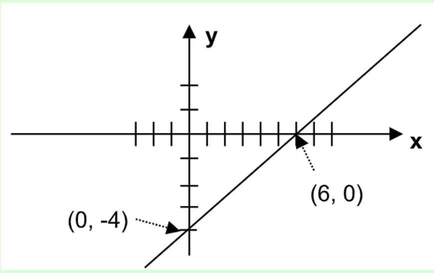
$$2(0) - 3y - 12 = 0 \implies 0 - 3y - 12 = 0 \implies -3y = 12 \implies y = -4$$

Por tanto $x = 0, y = -4$ es una solución de la ecuación.

Si hacemos ahora y = 0 tenemos:

$$2x - 3(0) - 12 = 0 \implies 2x - 12 = 0 \implies 2x = 12 \implies x = 6$$

Por tanto x = 6, y = 0 es otra solución.
Tracemos la recta que pasa por los puntos $(6, 0)$ y $(0, -4)$.



Ésta es una manera sencilla de encontrar la gráfica de una ecuación lineal, encontrando las intersecciones con los ejes X y Y.

1.3. *Forma pendiente – ordenada al origen de la ecuación lineal*

Definición.

Queda claro entonces que cualquier ecuación que pretenda ser lineal tendrá que tener la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

Si despejamos la variable y de nuestra ecuación, obtenemos:

$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$

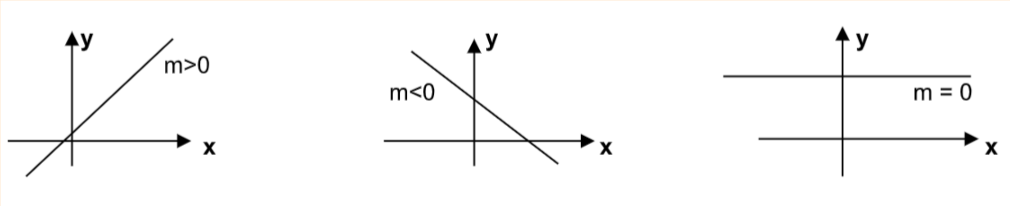
Efectuando la división: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Y si hacemos $m = \frac{-A}{B}, b = \frac{C}{B}$, la ecuación queda como:

$$y = mx + b$$

La ecuación anterior es una ecuación lineal escrita en la forma **pendiente − ordenada al origen**. El hecho de haber llamado m y b a los números $-A/B$ y $-C/B$ respectivamente es porque éstos números tienen un significado geométrico especial:
m es llamada la **pendiente de la recta**, pues representa una medida de inclinación, es decir, qué tan inclinada está la gráfica de la ecuación. Si $m > 0$, la recta esta inclinada en sentido creciente, mientras que si $m < 0$, la inclinación de la recta es decreciente, como se muestra en la figura.

Definición.



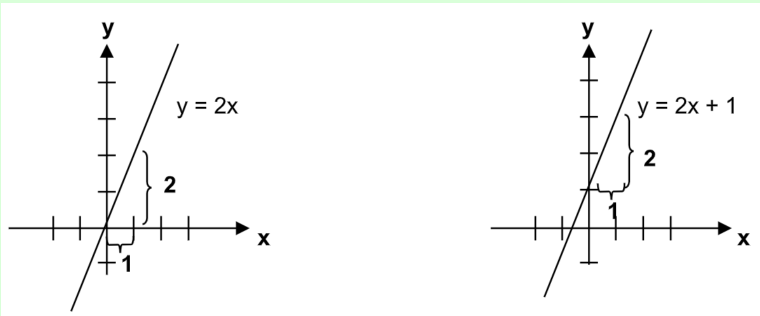
Para $m = 0$ tendremos una recta con inclinación cero, o sea, una recta completamente horizontal.

b se conoce con el nombre de **ordenada al origen**, y nos dice a qué distancia está la intersección de la recta con el eje Y, respecto al origen: notemos que si damos a x el valor $x = 0$ en $y = mx + b$, obtenemos que $y = b$, por tanto la ecuación pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo 5.

Graficar las rectas $y = 2x, y = 2x + 1$ e indicar sus pendientes y ordenadas al origen. ¿qué tienen en común las dos rectas? ¿Cuál es la diferencia?.

*Solución.*Si damos valores a x y graficamos algunos puntos obtenemos las gráficas siguientes:



Para la recta $y = 2x$, la pendiente es m = 2, lo cual significa que la recta tiene inclinación 2; por cada unidad que "cambia" x, la y cambia 2 unidades. La ordenada al origen es cero ($b = 0$), por lo que la recta interseca al eje Y en $(0, 0)$.

Para la recta $y = 2x+1$, la pendiente también es $m = 2$, y como se ve en la gráfica, tiene la misma inclinación que la primera, la diferencia es que ésta tiene ordenada al origen $b = 1$, por lo que su intersección con el eje vertical Y, es el punto $(0, 1)$.

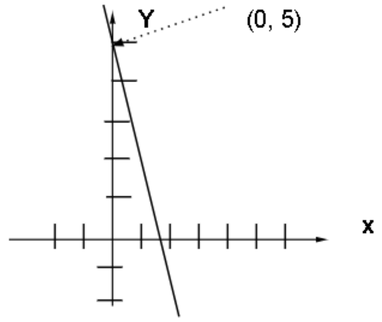
Podemos esperar entonces que si graficamos las rectas $y = 2x + 2, y = 2x + 3, etc.$, obtengamos rectas que tengan la misma inclinación que las anteriores, es decir, serían paralelas todas, pero sus intersecciones con el eje Y serían distintas al ser diferentes ordenadas al origen.

Ejemplo 6.

Encuentra la pendiente m y la ordenada al origen b de la ecuación $3x + y - 5 = 0$. Graficar la recta que representa.

Solución. Si despejamos y obtenemos: $y = -3x + 5$.Haciendo una tabla de valores para x, y, y graficar los puntos obtenemos:

x	y = -3x + 5	(x, y)
-1	y = -3(-1) + 5 = 8	(-1, 8)
0	y = -3 (0) + 5 = 5	(0, 5)
1	y = -3 (1) + 5 = 2	(1, 2)
2	y = -3 (2) + 5 = -1	(2, -1)
3	y = -3 (3) + 5 = -4	(3, -4)



De la ecuación se ve que la pendiente es $m = -3$, lo cual significa que por cada unidad que avanza x hacia la derecha, la y decrece hacia abajo tres unidades. La ordenada al origen es $b = 5$, entonces la recta pasa por el punto $(0, 5)$.

Ejercicio 5.

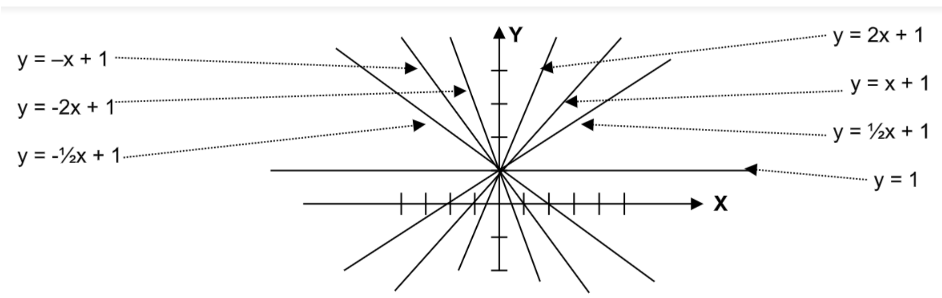
Escribe cada ecuación lineal en las forma $Ax + By + C = 0, y = mx + b$. Traza su grafica indicando pendiente y ordenada al origen.

1. $y + 2x = 10$
2. $2x + y = 4$
3. $3x = 4 + y$
4. $2x - 4 = 3y$
5. $x + y + 2 = 0$
6. $x - 3y = 2$
7. $2x - 5y + 10 = 0$
8. $5 - (x - y) = 3x - 2$

Familias de rectas

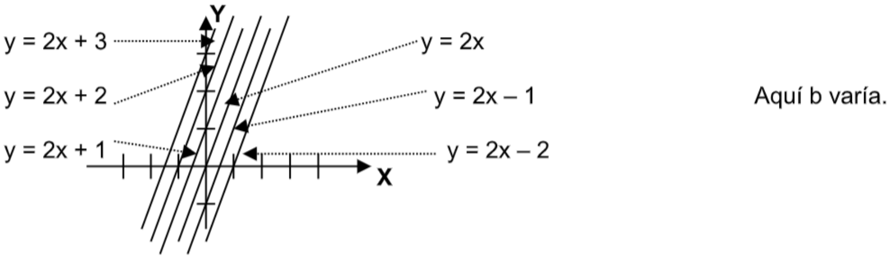
Ya hemos visto que la ecuación $y = mx + b$ representa una línea recta para valores determinados de m y b. Si consideramos el caso en el que b = 1 y dejamos que m pueda ser cualquier número, para cada valor que asignemos a m, tendremos una recta distinta que pase por $(0, 1)$.

Así, por ejemplo, si $m = 1$, se tiene la recta $y = x + 1$, que tiene pendiente 1 y pasa por $(0, 1)$. Si $m = 3$, se tiene la recta $y = 3x + 1$ con pendiente 3 y pasa por $(0, 1)$; si $m = -2$, se tiene $y = -2x + 1$, etc.



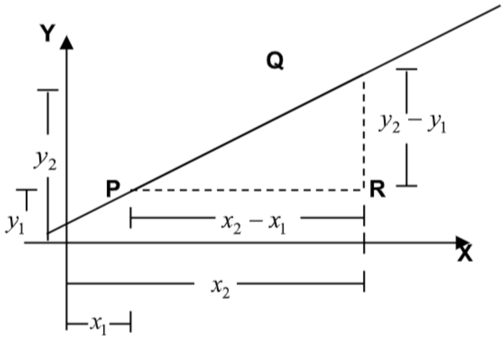
Obtenemos una gráfica que consta de una serie de rectas que tienen en común el punto $(0, 1)$, pues todas tienen ordenada al origen $b = 1$, lo que varía en este caso es la pendiente m.

Si ahora dejamos fijo m, digamos, $m = 2$, y dejamos que b sea cualquier número, tendremos $y = 2x + b$, que representa una familia de rectas paralelas, pues todas tienen pendiente 2.



1.4. *Inclinación y pendiente de una recta*

Sea $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera. Imagina que vas recorriendo una calle recta en una patineta. De pronto, al llegar al punto **P** la calle se empieza a inclinar y debes subir por una pendiente a lo largo de la recta **PQ**.



Definición.

La **pendiente** de la recta **PQ** es una medida de qué tan *inclinada* está esa recta. Para medir esto necesitamos determinar primero las siguientes distancias:

La distancia horizontal **PR** $= x_2 - x_1$

La distancia vertical **QR** $= y_2 - y_1$

Estas dos distancias pueden observarse en la figura anterior como los catetos horizontal y vertical, respectivamente, del triángulo **PQR**. La pendiente de la recta **PQ** se define como la razón entre estas dos distancias:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

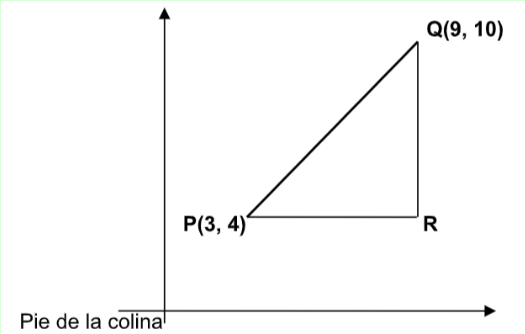
El número **m** se conoce como pendiente de la recta que pasa por **P** y **Q**. Ese número no es otra cosa sino la tangente del ángulo que forma la recta PQ con el eje horizontal (o eje de las X). Si llamamos θ a ese angulo, entonces tenemos que:

$$m = Tan\theta$$

El ángulo θ se conoce como **inclinación** de la recta **PQ**.

Ejemplo 7.

La casa de Pamela está ubicada cuesta arriba sobre una colina en una longitud de 3 m y una altitud de 4 m, respecto al pie de la colina. La casa de Quetzalcóatl está en la misma colina pero en una longitud de 9 m y una altitud de 10 m, como se muestra en la figura siguiente. Calcula la pendiente y la inclinación de la colina.



Solución. Primero dibujamos los segmentos **PR** y **QR** que representan la distancia horizontal y vertical, respectivamente. La pendiente de la colina está dada por:

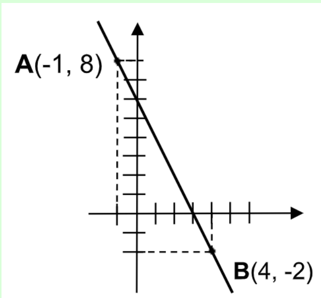
$$m = \frac{QR}{PR} = \frac{10-4}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

El ángulo de inclinación se calcula con la *función inversa* de la tangente:

$$\theta = \tan^{-1}(-1) = 45$$

Ejemplo 8.

Calcula la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por $A(-1,8)$ y por $B(4,-2)$.
Solución. Aqui $x_1 = -1, x_2 = 4, y_1 = 8, y_2 = -2$ Entonces la pendiente de **AB** es:



$$m = \frac{-2-8}{4-(-1)} = \frac{-10}{5} = -2$$

Observa que hemos obtenido una pendiente negativa. Esto es porque la recta está inclinada *cuesta abajo* o en *forma decreciente.*

Ejemplo 8.

Para calcular la inclinación, usamos la función inversa de la tangente.

$$\theta = Tan^{-1}(-2) \approx -63-43$$

En este caso, el ángulo también es negativo, pues se está midiendo con respecto al eje horizontal y en este caso la recta decrece conforme se avanza horizontalmente de izquierda a derecha.
Si queremos obtener el ángulo positivo debemos sumar 180°:

$$-63.43 + 180116.56$$

Ejercicio 6.

Encontrar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los pares de puntos que se dan. Haz un dibujo para cada caso.

1. $(3, 2), (5, 8)$
2. $(3, 6), (6, -2)$
3. $(-4, 1), (-1, 5)$
4. $(-6, 9), (0, 7)$
5. $(-7, 0), (0, -5)$
6. $(-5, -4), (4, -3)$
7. $(-6, 0), (0, -6)$
8. $(1, -5), (-1, -5)$
9. $(2, 5), (2, -5)$
10. $(0, 8), (-8, 0)$

1.5. *Rectas paralelas y perpendiculares*

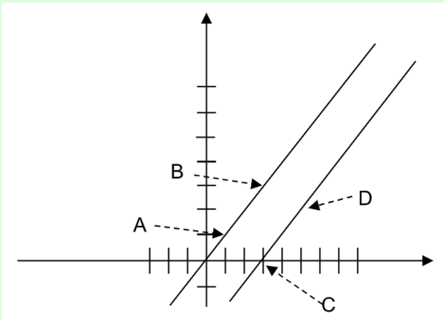
Definición.

Dos rectas y son *paralelas* si, y sólo si, sus pendientes son iguales.

Ejemplo 9.

Sea l_1 la recta que pasa por $A(1, 1)$ y $B(3, 3)$ y sea l_2 la recta que pasa por $C(3, 0)$ y $D(5, 2)$. Demostrar que las rectas son paralelas.

*Solución.*Hagamos un dibujo de las rectas:



si llamamos m_1 a la pendiente de l_1 y m_2 a la pendiente de l_2, nos queda que:

$$m_1 = \frac{3-1}{3-1} = 1$$

$$m_2 = \frac{2-0}{5-3} = 1$$

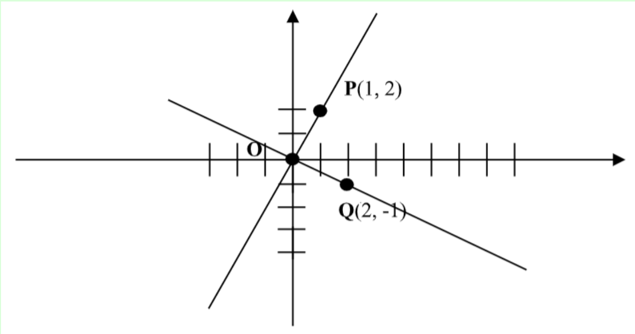
Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas.

Definición.

Dos rectas y son *perpendiculares* si, y sólo si, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

Ejemplo 10.

Considérese la recta l_1 la recta que pasa por $O(0,0)$ y $P(1,2)$ y la recta l_2 la recta que pasa por $O(0,0)$ y por $Q(2,-1)$. Compruébese que son rectas perpendiculares.



A simple vista parecen perpendiculares, pero necesitamos comprobarlo haciendo los cálculos:

$$m_{OP} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$m_{OQ} = \frac{-1-0}{2-0} = \frac{-1}{2}$$

Como las pendientes son recíprocas y de signo contrario, concluimos que las rectas son perpendiculares.

Ejemplo 11.

Demostrar por medio de pendientes que los puntos $A(2,4), B(6,-1), C(8,2) y D(4,7)$ son los vértices de un paralelogramo.

Solución. Primero conviene hacer un dibujo de los puntos. En la siguiente página se muestra uno.

Calculamos las pendientes de los lados $AB, BC, CD y DA$:

$$m_{AB} = \frac{-1-4}{6-2} = \frac{-5}{4}$$

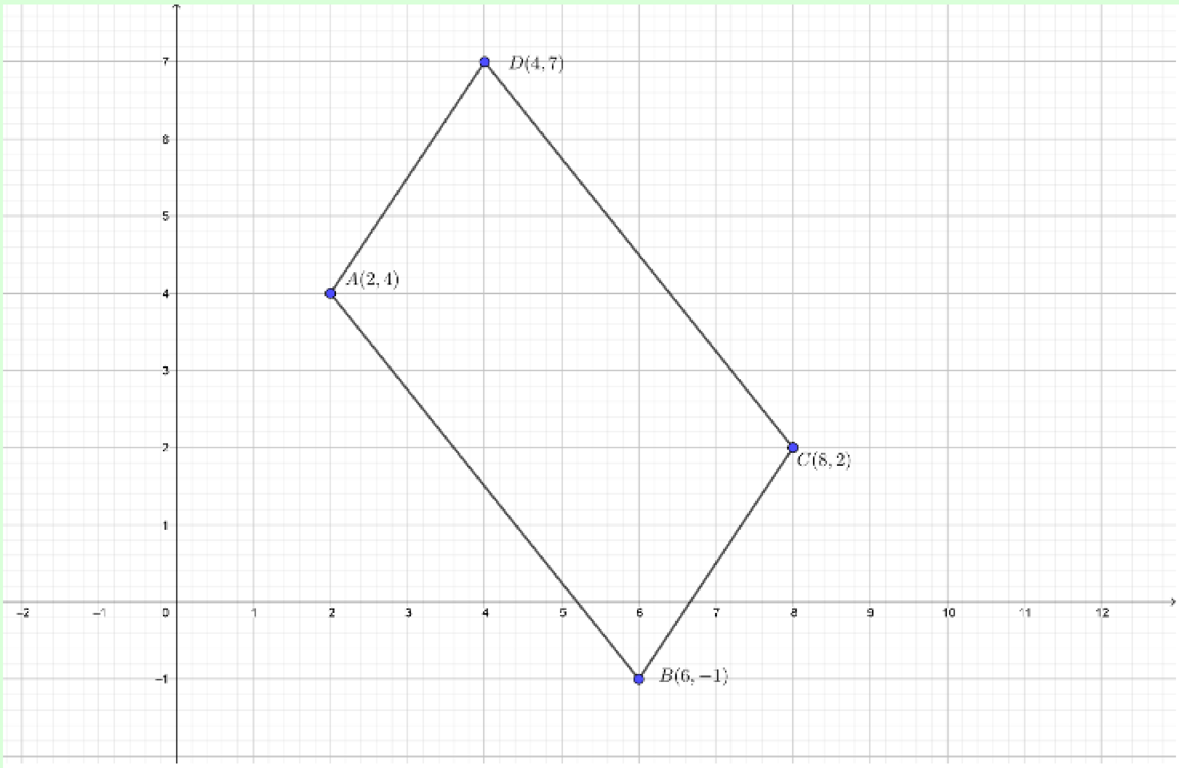
$$m_{BC} = \frac{2-(-1)}{8-6} = \frac{3}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{7-2}{4-8} = \frac{5}{-4}$$

$$m_{AD} = \frac{7-4}{4-2} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 11cont.

Como hay dos pares de pendientes iguales, concluimos que hay dos pares de lados paralelos. Por lo tanto se trata de un paralelogramo.



Ejercicio 7.

Demuestra por medio de pendientes que los puntos $P(3,5), Q(1,-1)$ y $R(-4,-16)$ quedan en línea recta.

Ejercicio 8.

Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(4,3), B(6,-2)$ y $C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

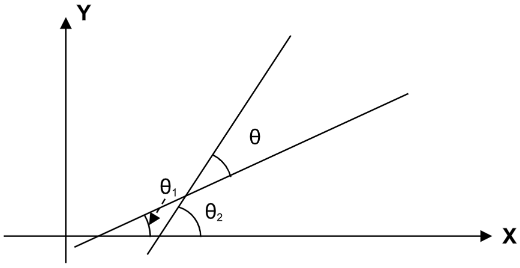
Ejercicio 9.

Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(6,-3), B(7,6)$ y $C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

1.6. *Ángulo entre dos rectas*

Supongamos que dos líneas rectas y se intersectan formando un ángulo θ como se muestra en la figura.

El ángulo θ es la diferencia $\theta_2 - \theta_1$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman las rectas y con el eje horizontal.



En esta situación, calcularemos el ángulo θ con la siguiente fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

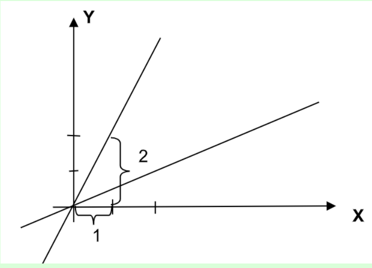
Esta fórmula puede deducirse con las identidades trigonométricas vistas en el curso de trigonometría. La identidad que se necesita es la tangente de la diferencia de dos números $tan(\theta_2 - \theta_1)$ en términos de $tan\theta_2 y tan\theta_1$ y usando que $m_1 = tan\theta_1$ y $m_2 = tan\theta_2$.

Ejemplo 12.

Dos rectas y tienen pendientes $m_1 = 1/2$ y $m_2 = 2$, respectivamente. ¿Cuánto vale el ángulo θ entre ellas?

*Solución.*Primero que nada, como siempre, hagamos un dibujo.

No sabemos por qué puntos pasan las rectas, pero las pendientes nos dicen qué tan inclinadas están: La recta tiene pendiente $m_1 = 1/2$, esto significa que por cada unidad que avanza x horizontalmente, y avanza 1/2 unidad hacia arriba; la recta tiene pendiente $m_2 = 2$, esto significa que por cada unidad que avanza x horizontalmente, y avanza 2 unidades verticalmente hacia arriba, como se muestra:



Utilizando la fórmula para el ángulo entre dos rectas, tenemos que:

$$Tan\theta = \frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Para hallar θ, usamos la función inversa de la tangente en la calculadora: $\theta = Arctan(0.75) =\approx 36.87$

Recordemos que arctan denota la función inversa de la tangente. Es una manera de "despejar" el ángulo cuando está afectado por la función tangente. En las calculadoras aparece como $tan^{-1}(0.75)$, pero en este libro he decidido no usar esta notación, ya que podría confundirse con la función cotangente, que es el recíproco de la tangente.

Ejercicio 10.

Encuentra el ángulo que forman dos rectas y cuyas pendientes son $m_1 = 1/2$ y $m_2 = 1$, respectivamente.

Ejercicio 11.

Encuentra el ángulo que forman dos rectas y cuyas pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$, respectivamente.

Ejercicio 12.

Dos rectas y cuyas pendientes son m_1 y m_2 , respectivamente, se intersectan formando un ángulo de 45. Si $m_1 = 1$, encontrar m_2 .

Ejercicio 13.

Explora qué pasa cuando dos rectas y tienen pendientes muy parecidas, es decir m_1 y m_2 son "casi iguales". Haz un ejemplo con $m_1 = 1$ y $m_2 = 0.9$. ¿Cuánto vale el ángulo que forman?

1.7. *División de un segmento en una razón dada*

Definición.

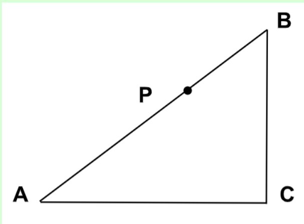
Sea **AB** un segmento con extremos **A** y **B**. Si seleccionamos un punto **P** que quede adentro del segmento **AB**, el segmento queda dividido en dos: **AP** y **PB**. La razón en que queda dividido es:

$$\frac{AP}{PB}$$

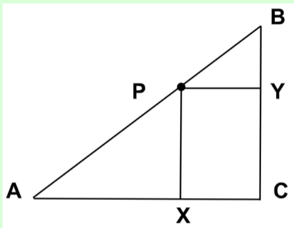
Esa razón mide qué tan *grande* o *pequeño* es el segmento **AP** comparado con el segmento **PB**, o dicho de otra manera, cuántas veces cabe **PB** en **AP**. Ese número podría ser un entero o una fracción.

Ejemplo 13.

Por ejemplo:



En la figura aparece un punto **P** que divide al segmento **AP**. Podemos dibujar los segmentos **PX** y **PY** como se muestra a continuación:



Se cumple entonces que: *la razón del segmento **AX** al segmento **XC** es la misma que la razón del segmento **CY** al segmento **YB** y es la misma que la razón del segmento **AP** al segmento **PB**.*

Es decir:

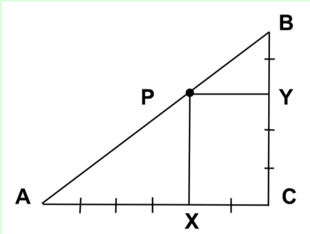
$$\frac{AX}{XC} = \frac{CY}{YB} = \frac{AP}{PB}$$

Ejemplo 13cont.

Si medimos los lados tendremos que $AX = 4, XC = 2, CY = 3$ y $YB = 1.5$

Se tenemos entonces que

$$\frac{AX}{XC} = \frac{4}{2} = 2 \qquad\qquad y \qquad\qquad \frac{CY}{YB} = \frac{3}{1.5} = 2$$



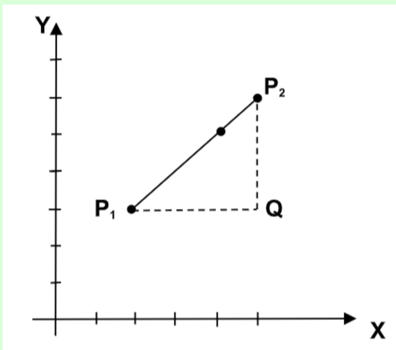
Por lo que $\frac{AP}{PB} = 2$

En tal caso se dice que el punto **P** está ubicado a una distancia *doble a **A** que a **B** o bien que **P** divide al segmento **AB** en razón 2 a 1.*

Ejemplo 14.

Sean $P_1(2,3)$ y $P_2(5,6)$. Encontrar las coordenadas de un punto **P** que se localiza a una distancia doble a P_1 que a P_2.

Solución. Hagamos un dibujo de los puntos y el segmento.



El punto **P** debe dividir al segmento en tres partes iguales, por lo tanto también los segmentos P_1Q y P_2Q quedarán divididos en tres partes iguales. Observamos que tanto P_1Q como P_2Q miden 3 unidades. Al dividirlos en tres, cada parte vale 1 unidad, así el punto **P** es el $(4,5)$.

Ejercicio 14.

Dados los puntos $A(-2,7)$ y $B(6,-5)$. Encuentra las coordenadas de un punto **P** colocado a una distancia triple a **A** que a **B**.

Ejercicio 15.

Dados los puntos $C(-3,4)$ y $D(5,6)$. Encuentra las coordenadas de un punto **P** ubicado a la misma distancia de **C** y de **D**.

Ejercicio 16.

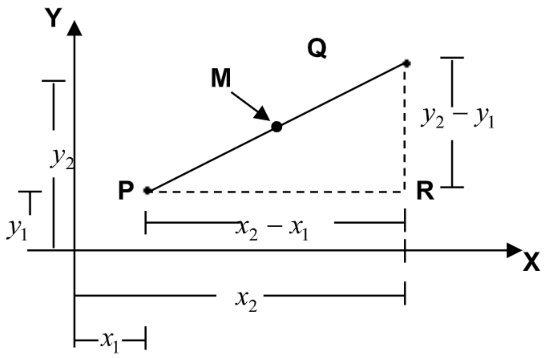
15. Sea **O** el punto origen $(0,0)$ y $A(9,12)$. Localiza los puntos $A'(3,4)$ y $A''(6,8)$. ¿En qué razón divide **A'** al segmento **OA**? ¿En qué razón divide **A"** al segmento **OA**?

1.8. *Punto medio de un segmento*

Definición.

Sean $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera, el *punto medio* de **P** y **Q** es un punto **M**que está **a la misma distancia** de **P** y de **Q**. Es decir, $\mathbf{PM} = \mathbf{QM}$.

Para calcularlo debemos tomar el *promedio* de sus coordenadas: Las coordenadas del punto medio serán **M**.



Ejercicio 17.

Calcula la distancia entre los puntos **M** y **P**, luego calcula la distancia entre los puntos **M** y **Q**. ¿cómo son estas distancias?

1.9. *Ejercicios y problemas*

1. Determina algunas soluciones para cada ecuación y grafica en un plano cartesiano **XY**.

   a) $x + y = 8$
   b) $2x + y = 8$
   c) $x - y = 1$
   d) $3x - y + 1 = 0$
   e) $y = 4x + 2$
   f) $x + 2y - 12 = 0$

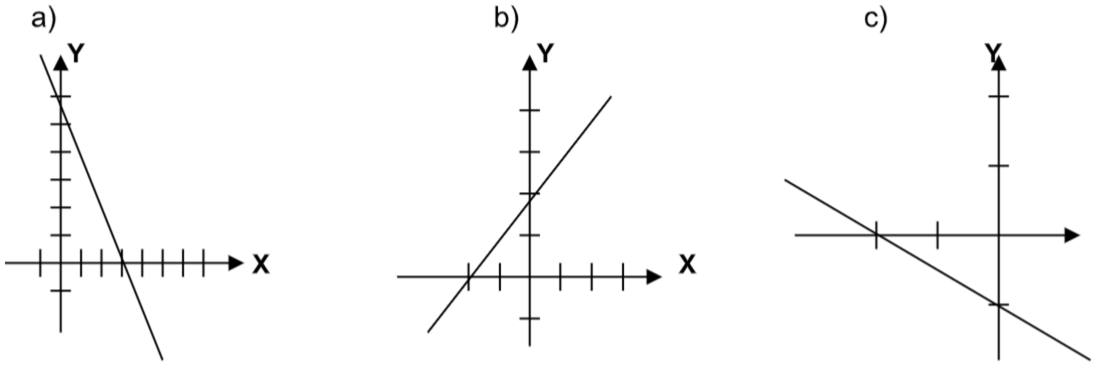
2. Grafica las siguientes ecuaciones lineales despejando primero **y** y tabulando algunas soluciones. Encuentra cuál es la pendiente en cada caso.

   a) $y = 3x$
   b) $y = 3x + 4$
   c) $2x + 3y = 6$
   d) $4x–y = 1$
   e) $x + y = 10$
   f) $2x–y = 2$
   g) $x–y = 3$
   h) $3x + y = 4$
   i) $2x + 5y = 12$

3. Determina el valor de la pendiente m, y ordenada al origen b, de cada una de las ecuaciones siguientes.

   a) $2x + 3y = 0$
   b) $y–x = 1$
   c) $2x + y–5 = 0$

4. Observa las gráficas que se presentan de ecuaciones lineales, e indica cual es la pendiente y la ordenada al origen en cada caso.



5. Traza las rectas con los datos que se dan a continuación.

   a) pasa por $(0, 2)$ y tiene pendiente 1.
   b) Tiene pendiente -1 y ordenada al origen -3.
   c) Pasa por $(3, 4)$ y la pendiente es $m = -4$.
   d) Tiene $m = 3$, y $b = -5$.
   e) Tiene pendiente $m = 2/3$ y pasa por el origen.

6. Calcula la pendiente de la recta que pasa por:

   a) $(-2, -1), (-4, 11)$
   b) $P_1(1/3, -2), P_2(5/6, -7)$
   c) $(-2, -1), (-4, 11)$
   d) $(7, -3), (10, 5)$
   e) $P_1(1/3, -2), P_2(5/6, -7)$

7. Considera una recta L_1 que pasa por $(0, 0)$ y $(5, 2)$ y otra recta L_2 que pasa por $(6, 5)$ y $(1, 3)$. Decir si L_1 es paralela o perpendicular a L_2 .

8. ¿Una recta L_1 que pasa por $(-6, 0)$ y $(0, -6)$ y otra L_2 que pasa por $(8, 6)$ y $(2, 12)$ son paralelas? O perpendiculares. ¿Porqué?

9. ¿Cuál es la distancia entre $(3, 4)$ y $(1, -7)$?

10. Una recta L_1 pasa por $(0, 9)$ y $(11, 4)$ y otra L_2 pasa por $(3, 1)$ y $(8, 12)$ ¿cómo son entre sí?

11. ¿Los puntos $(-3, 1), (3, 2), (7, 4)$ son colineales? ¿Por qué?

12. ¿Cuál es el ángulo que se forma entre dos rectas cuyas pendientes son $m_1 = 2$ y $m_2 = 5$?

13. ¿Cuál es el ángulo que se forma entre dos rectas cuyas pendientes son $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$?

14. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 se intersectan formando un ángulo de 60, si $m_1 = -1/2$, encontrar m_2

15. Dados los puntos $P_1(-1, -2)$ y $P_2(5, 7)$ encontrar las coordenadas de $P(x, y)$ que está colocado a una distancia doble a P_1 que a P_2

16. Encontrar las ecuaciones de las rectas con los siguientes datos:

   a) pasa por $(-4, 5)$ y por $(7, 9)$
   b) pasa por $(3, 0)$ y por $(6, -4)$
   c) tiene pendiente $m = 1/2$ y pasa por $(1, 3)$
   d) pasa por los puntos $P_1(5, -12)$ y $P_2(0, 3)$
   e) pasa por el punto $P(2, -1)$ y con pendiente -3.
   f) interseca al eje Y en $(0, -2)$ y tiene pendiente -6.

g) interseca al eje X en $(-1/3, 0)$ y al eje Y en $(0, 12)$.

h) pasa por el punto $P(0, 7)$ y cuya pendiente vale -6.

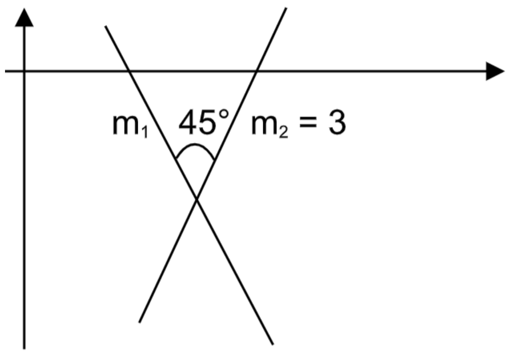
17. Encontrar el ángulo de inclinación de las rectas que se indican.

    a) La recta que pasa por los puntos $P(1, 5)$ y $Q(4, 7)$.

    b) La recta que pasa por los puntos $P_1(58, -93)$ y $P_2(68, -6)$.

    c) La recta que pasa por los puntos $P(1, 5)$ y $Q(4, 7)$

18. Observa la figura.



19. Si el ángulo entre dos rectas es de $6633'$ y la pendiente de una de ellas es $m_1 = -1$, ¿Cuál es el valor aproximado de la otra pendiente?

20. Dos rectas l_1 y l_2 se intersectan formando un ángulo de 45. Si el valor de m_2 es 3, ¿cuál es el valor de la pendiente m_1 ?

21. Si $P_1(-11, 0), P_2(-2, -2), P_3(6, 2), P_4(9/2, 5)$ son los vértices de un cuadrilátero, ¿cuáles de los segmentos que unen sus vértices son perpendiculares?

22. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $P(4, 1)$ y $Q(6, 6)$?

23. Dados los puntos $P_1(-2, 8)$ y $P_2(-4, -3)$, encontrar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está entre ellos si la distancia de P a P_1 es tres veces mayor que de P a P_2 .