Cimientos Matemáticos

Módulo 12: Ecuaciones de las cónicas

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

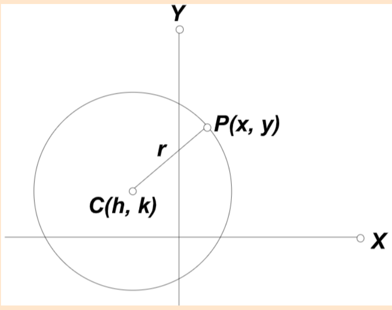
1. Modulo 12. *ECUACIONES DE LAS CÓNICAS*

1.1. *Ecuación de la circunferencia*

Definición.

Circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.
Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio igual a r.
Si P es un punto de la circunferencia, entonces, cualquiera que sea su posición sobre ella, la distancia CP será igual a r. Podemos afirmar que $CP = r$.
Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tendremos.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r$$



Esta se conoce como ecuación cartesiana de la circunferencia y representa a una circunferencia de radio r y centro en (h, k).

Esta ecuación puede presentarse en su forma general que es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para eso se deben desarrollar los binomios al cuadrado y dejar a todos los términos en el lado izquierdo de la igualdad.

Ejemplo 1.

Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en $(3, 4)$ y radio igual a 5 unidades.

Solución. Aquí $h = 3, k = 4$ y $r = 5$. Sustituyendo en la ecuación cartesiana tenemos:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Esta es la ecuación cartesiana. Si deseamos expresarla en su forma general debemos desarrollar los binomios al cuadrado:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

Finalmente reordenamos los términos y agrupamos los términos independientes:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

Esta es la ecuación buscada.

Ejercicio 1.

Encontrar la ecuación de cada circunferencia en su forma cartesiana y expresarla en forma general.

1. Tiene su centro en $(-4, 6)$, radio 6.
2. Tiene su centro en $(0, 5)$, radio 8.

Ejercicio 2.

Encontrar el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

1. $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 49$
2. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 64$

Ahora, si se tiene una ecuación en forma general y se desea expresarla en forma cartesiana $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ se deben completar trinomios cuadrados perfectos con x e y, para factorizar como binomios al cuadrado.

Ejemplo 2.

Considérese la ecuación $3x^2 + 3y^2 + 36x - 12y = 0$. Escríbase esta ecuación en su forma cartesiana y encuéntrense el centro y el radio de la circunferencia.

*Solución.*Primero dividamos todos los términos de la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + 12x - 4y = 0$$

Ahora completemos los trinomios cuadrados perfectos en x e y, para lo cual debemos sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente que acompaña a x o a y según sea el caso:

$$x^2 + +12x + (\frac{12}{2})^2 + y^2 - 4y + (\frac{4}{2})^2 = (\frac{12}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2$$

Obsérvese que se han sumado los mismos números en ambos lados de la igualdad. Simplificando las fracciones y efectuando las operaciones, tenemos:

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 40$$

Ahora podemos agrupar los trinomios cuadrados perfectos como binomios al cuadrado:

$$(x+6)^2 + (y-2)^2 = 40$$

Esta es la ecuación escrita en su forma cartesiana, así que $h = -6, k = 2$ y $r = 40$.

Conviene escribir el radio simplificando lo más que se pueda el radical:

$$40 = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Ejercicio 3.

Escribir la ecuación $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 379 = 0$ en la forma cartesiana. Hallar el centro y el radio de la circunferencia y hacer un dibujo de ella.

Ejercicio 4.

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $3x^2 + 3y^2 + 36x - 12y = 0$

1.2. *Circunferencia determinada por tres condiciones*

En el módulo anterior estudiamos la línea recta. Una línea recta queda determinada siempre por dos condiciones que pueden ser: un punto y otro punto distinto al primero, un punto y una pendiente, una pendiente y una ordenada al origen. Para determinar una circunferencia dos puntos no son suficientes. Hágase por ejemplo el ejercicio de dibujar varias circunferencias que pasen por dos puntos dados P y Q. En cambio dados tres puntos (no alineados) sí es posible encontrar una y sólo una circunferencia que pase por ellos. De tu curso de geometría euclidiana quizás aprendiste cómo hacer la construcción con regla y compás. En este curso aprenderemos a hacerlo en forma analítica: toda circunferencia tiene una ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Cualquier punto que pertenezca a dicha circunferencia tendrá un par de coordenadas (x, y) que satisfacen esa ecuación. Esta idea es la clave.

Supongamos que conocemos las coordenadas de tres puntos no colineales **P, Q y R** y deseamos encontrar la ecuación de la circunferencia que pase por esos tres puntos. Puesto que las coordenadas (x, y) son conocidas, estas deben satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ En esta ecuación ahora nuestras incógnitas son D, E y F, por lo que al sustituir los tres puntos tendremos tres ecuaciones con tres incógnitas D, E y F.

Ejemplo 3.

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(3, 4), Q(-1, -4)$ y $R(5, 2)$.

Solución. Vamos a sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la circunferencia.
Como $P(3, 4)$ es un punto de la circunferencia, al sustituir los valores $x = 3, y = 4$ en la ecuación general de la circunferencia, tendremos:

$$3^2 + 4^2 + 3D + 4E + F = 0$$

Como $Q(-1, -4)$ es un punto de la circunferencia, tenemos:

$$(-1)^2 + +4^2 + (-1)D - 4E + F = 0$$

Como $R(5, 2)$ es un punto de la circunferencia, tenemos:

$$5^2 + +2^2 + 5D + 2E + F = 0$$

Efectuando las operaciones en cada ecuación y pasando los términos independientes al lado derecho de la igualdad, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$3D + 4D + F = -25 \tag{1}$$

$$-D - 4E + F = -17 \tag{2}$$

$$5D + 2E + F = -29 \tag{3}$$

Restando la ecuación (2) de la ecuación (1) obtenemos $4D + 8E = -8$. (4)

Ahora podemos restar la ecuación (3) de la ecuación (2) y obtener $-6D - 6E = 12$ (5)

Dividamos la ecuación (4) por 4. Nos queda:

$$D + 2E = -2 \tag{4}$$

Dividamos la ecuación (5) por 6. Nos queda:

$$-D - E = 2 \tag{5}$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos:

$$E = 0$$

Ejemplo 3cont.

Reemplazando este valor en (4), nos queda:

$$D + 2(0) = -2$$

De donde se obtiene

$$D = -2$$

Finalmente podemos sustituir $E = 0, D = -2$ en cualquiera de las ecuaciones originales (1), (2) ó (3) para despejar el valor de F. Sustituyendo en (3) obtendremos:

$$5(-2) + 2(0) + F = -29$$

De donde se obtiene

$$F = -19$$

Hemos obtenido que $D = -2, E = 0 y F = -19$. Sustituyendo estos valores en la forma general de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, llegamos a:

$$x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$$

Esta es la ecuación buscada.

Ejercicio 5.

Encuentra el centro y el radio de la circunferencia del ejercicio anterior.

Ejercicio 6.

¿Cuál de las siguientes es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(7, 9), Q(12, -3) y R(-5, -7)$?

1. $8x^2 + 8y^2 - 144x + 576 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 10x - 5y - 15 = 0$

1.3. *Parábola con vértice en el origen*

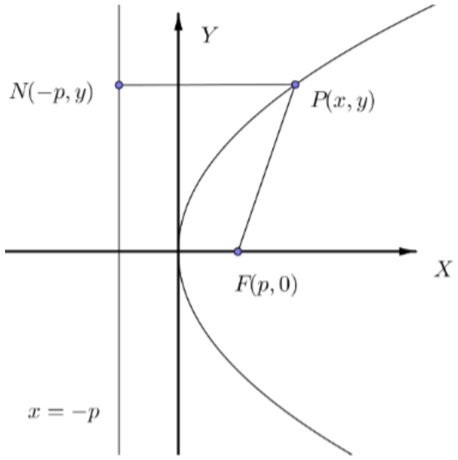
Definición.

Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado y de una recta fija dada, que no pase por el punto.

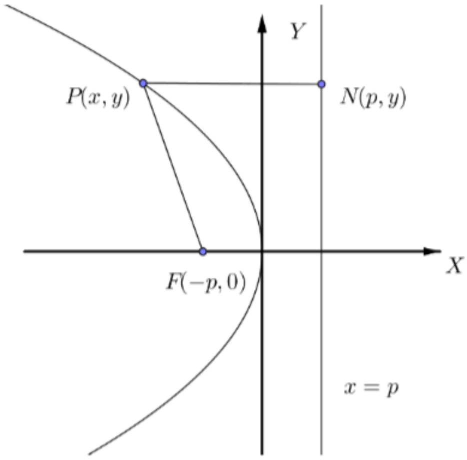
Al punto fijo se le *llama foco* (F), a la recta fija se le llama *directriz*. La distancia entre el foco y la directriz es $2p (p > 0)$. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama eje de la parábola. El punto medio entre la directriz y el foco pertenece a la *parábola* y se llama *vértice* de la misma.

Cuando la parábola tiene su vértice en el origen $(0, 0)$ y el eje de la parábola es el eje X, o el eje Y, su ecuación puede ser:

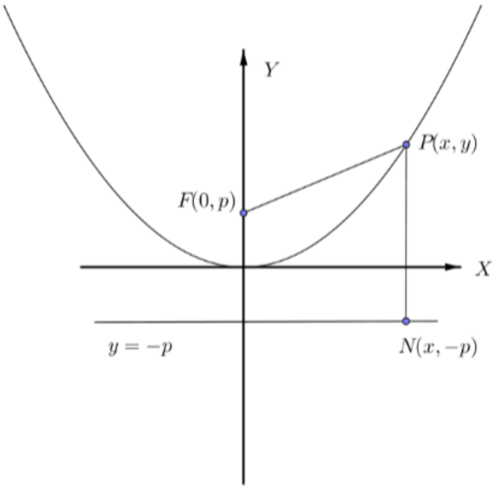
La cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola, se le llama *lado recto* de la parábola, y su longitud es igual a $4P$.



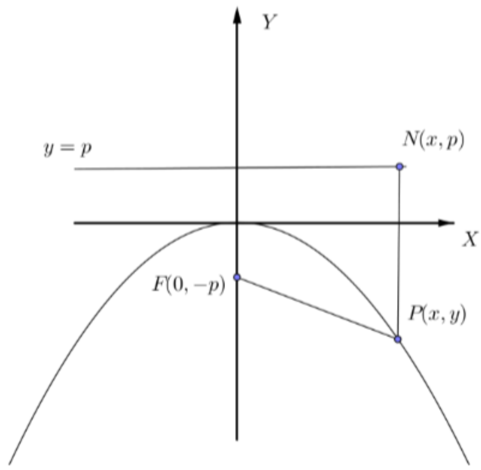
$$y^2 = 4px$$



$$y^2 = -4px$$



$$x^2 = 4py$$

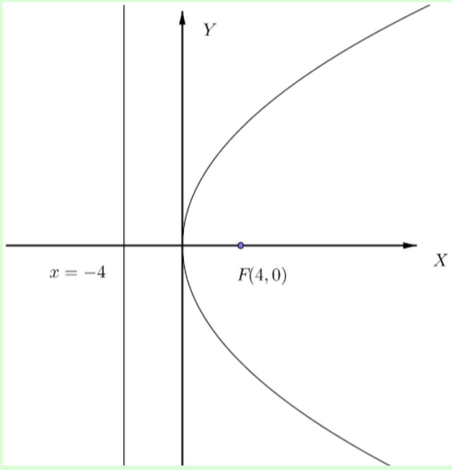


$$x^2 = -4py$$

Las cuatro ecuaciones anteriores así como la longitud del lado recto se pueden deducir fácilmente con algo de paciencia y utilizando la definición de parábola y aplicando la fórmula para la distancia entre dos puntos. Dejaremos esto como un buen ejercicio para el lector y pasaremos directamente a ver algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 4.

Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 16x$.



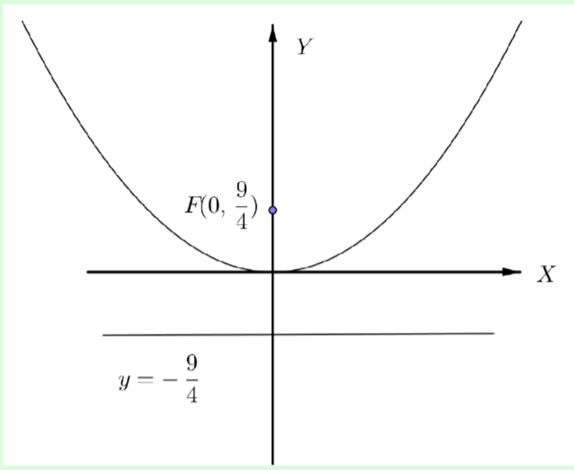
Solución. Por la forma de la ecuación, se trata de una parábola que abre hacia la derecha. Su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$, donde $4p = 16$, entonces $p = 4$. Quiere decir que la distancia entre el foco y el vértice es de 4 unidades. Como el vértice está en $(0, 0)$, las coordenadas del foco son $F(4, 0)$. La ecuación de la directriz es $x = -4$.

Ejemplo 5.

Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $3x^2 - 27y = 0$

Solución. Primero reescribimos la ecuación como $3x^2 = 27y$.Ahora dividamos ambos lados de la igualdad entre 3 y nos queda $x^2 = 9y$. Esta es una ecuación de la forma $x^2 = 4py$, por lo que se trata de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y que abre hacia arriba. Comparando las ecuaciones, tenemos que $4p = 9$, por lo tanto $p = \frac{9}{4}$

El foco esta en $f(0, \frac{9}{4})$, y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{9}{4}$



Ejercicio 7.

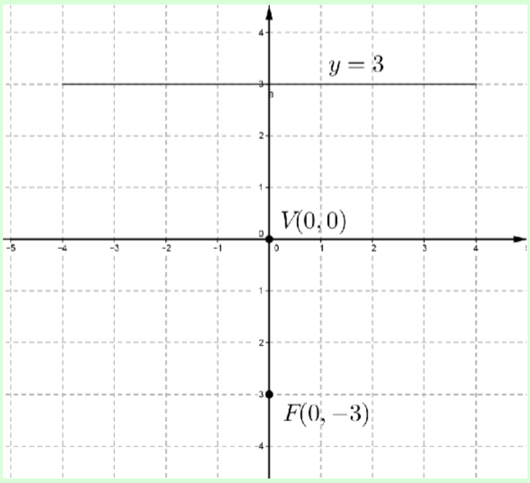
En cada inciso, encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para las parábolas cuya ecuación se da. Hacer un dibujo en cada caso.

1. $x^2 + 12y = 0$
2. $4y = 24x^2$
3. $12x = -3y^2$
4. $y^2 = -16x$

Ejemplo 6.

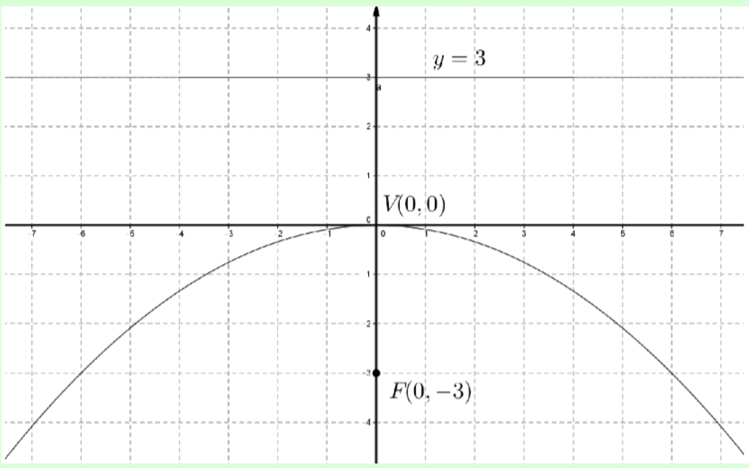
Encontrar la ecuación de la parábola que tiene su foco en el punto $F(0, -3)$, y cuya ecuación de la directriz es $y = 3$.

*Solución.*Hagamos un dibujo de los datos que nos dan. Notemos que el vértice debe estar en el origen $V(0, 0)$ y que la parábola debe abrir hacia abajo. Por lo tanto su ecuación es de la forma $x^2 = -4py$. El valor de p es la distancia entre el vértice y el foco, o lo que es lo mismo, la distancia entre el vértice y la directriz, por lo tanto $p = 3$.



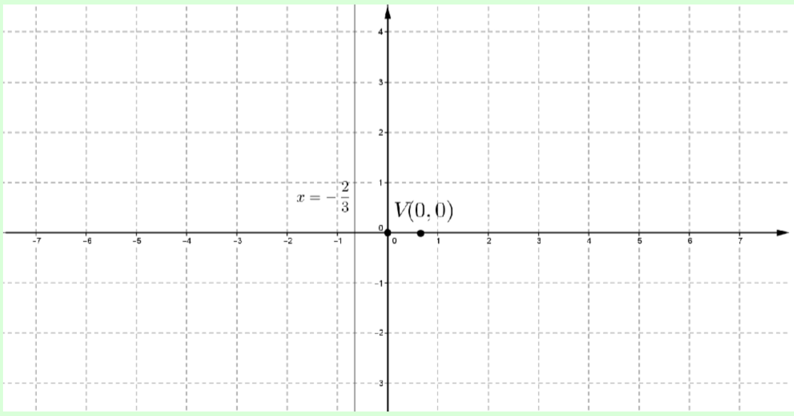
Sustituyendo $p = 3$, tenemos la ecuación $x^2 = -4(3)y$, y resolviendo operaciones nos queda:

$$x^2 = -12y$$



Ejemplo 7.

Encontrar la ecuación de una parábola que tiene su vértice en $V(0,0)$ y directriz en $x=-\frac{2}{3}$
*Solución.*La distancia entre el vértice y la directriz es $p=\frac{2}{3}$. Hagamos un dibujo con estos datos.



Como puedes ver, el foco debe estar a distancia $\frac{2}{3}$ respecto al vértice, pero hacia la derecha, por lo que se trata de una parábola que abre hacia la derecha, así que su ecuación será de la forma $y^2=4px$. En este caso $P=\frac{2}{3}$ así que la ecuación buscada es:

$$y^2=4(\frac{2}{3})x$$

Efectuando la operación, nos queda:

$$y^2=\frac{8}{3}x$$

Ejercicio 8.

Encontrar la ecuación para cada parábola con los datos dados.

1. Vértice en $(0,0)$, directriz $x=2$.
2. Foco en $(2/3,0)$, directriz $x=-2/3$.
3. Vértice en $(0,0)$, foco en $(0,-9)$.
4. Foco en $(0,-25)$, vértice en $(0,0)$.

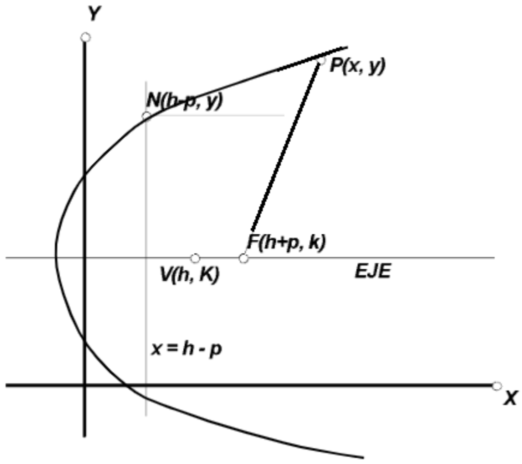
Ejercicio 9.

Encontrar la ecuación para cada parábola con los datos que se dan.

1. Vértice en $(0,0)$, pasa por $(-4,-3)$. Eje vertical.
2. Vértice en $(0,0)$, foco en el eje X y pasa por $(4,6)$.
3. Vértice en $(0,0)$, pasa por $(5,2)$.

1.4. *Parábola con vértice en un punto (h, k)*

Veamos ahora qué pasa cuando el vértice de la parábola no está en el origen. Asumiremos que el eje de la parábola es paralelo al eje X o bien paralelo al eje Y. Podemos pensar que el vértice está en el punto cuyas coordenadas son $V(h,k)$ y la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz seguirá siendo p. Consideraremos nuevamente las ecuaciones de los cuatro casos que pueden presentarse. Estas pueden deducirse fácilmente usando la definición de parábola y aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos. Queda como ejercicio para el lector verificar que resultan las siguientes ecuaciones:

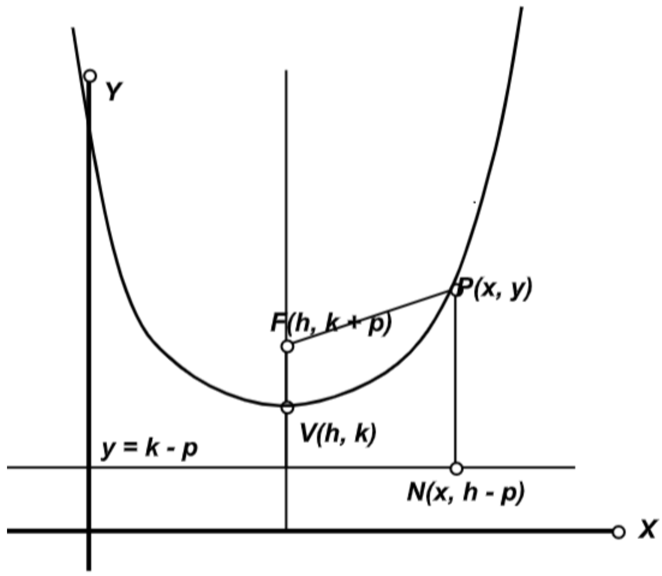


Para la parábola horizontal con vértice en (h, k), foco en $(h+p, k)$ y directriz $x = h-p$ la ecuación correspondiente es:

$$(y - k)^2 + = 4p(x - h)$$

Si la parábola es horizontal con vértice en (h, k) y sus ramas se extienden hacia la izquierda, su ecuación es:

$$(y - k)^2 = -4p(x - h)$$



La ecuación de una parábola con vértice en (h, k), foco en $(h, k + p)$ y directriz en $y = k - p$, es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Si la parábola es vertical y extiende sus ramas hacia abajo, su ecuación es:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Ejercicio 10.

Encontrar la ecuación de cada parábola con los datos dados a continuación. Hacer un dibujo en cada caso.

1. Directriz $y = 8$, Foco en $(3, -2)$
2. Directriz $y = -5$, Foco en $(-4, 3)$
3. Directriz $x = 4$, Foco en $(8, 6)$
4. Directriz $x = -1$, Foco en $(-5, -3)$

Cuando la ecuación está escrita en su forma general, o sea igualada a cero, podemos hacer lo mismo que hacíamos en el caso de la ecuación de la circunferencia: completar el trinomio cuadrado perfecto y después factorizar.

Ejercicio 11.

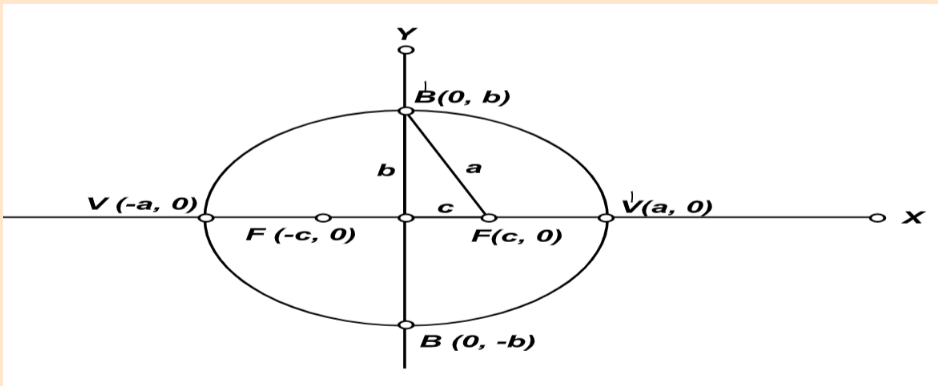
Encontrar las coordenadas del foco, vértice, ecuación de la directriz y longitud del lado recto.

1. $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
2. $4x^2 + 4x + 24y + 25 = 0$
3. $3y^2 + 24y + 30x + 38 = 0$
4. $x^2 - 4y + 8 = 0$

1.5. *Elipse con centro en el origen*

Definición.

Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante.
Los dos puntos fijos son los focos de la elipse. La constante es representada por $2a$.



Definición.

Los puntos V y V'son los vértices de la elipse y el segmento VV' es su eje mayor y su longitud es $2a$. Por lo que podemos concluir que $V'O = OV = a$

El segmento BB' es el eje menor de la elipse y su longitud es $2b$, por lo tanto la distancia $B'O = b$

Para deducir la ecuación de la elipse, consideramos un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la elipse. Por definición la suma de los segmentos $F'P + PF = 2a$, y usando la fórmula para la distancia entre dos puntos, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obsérvese que al ser c la distancia del centro $(0, 0)$ a cada uno de los focos, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ésta relación permite determinar las coordenadas de los focos, conociendo las longitudes de los ejes.

Ejercicio 12.

Determinar en cada caso la longitud del eje mayor, la longitud del eje menor, las coordenadas de los vértices, de los focos y graficar.

1. $2x^2 + 8y = 32$
2. $16x^2 + 25y^2 = 400$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$
4. $x^2 + 9y^2 = 9$
5. $x^2 + 4y^2 = 4$
6. $4x^2 + 7y^2 = 28$

1.6. *Elipse con centro en un punto V(h, k)*

Para deducir la ecuación de una elipse con centro fuera del origen podemos usar una técnica conocida como *traslación de ejes*. A grandes rasgos consiste en fijar el origen de un *nuevo sistema de coordenadas* $X'Y'$ cuyos ejes van a ser paralelos a los ejes del sistema original XY. Sea (h, k) el nuevo origen. Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ referidas al sistema original XY, van a ser (x', y') con respecto al nuevo sistema de coordenadas y éstas se relacionan con las originales a través de las ecuaciones:

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

De este modo, si tenemos una elipse cuyo centro está en el punto (h, k), podemos pensar que fijamos el origen de un nuevo sistema de coordenadas en ese punto y entonces su ecuación respecto a ese sistema será:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando las ecuaciones de traslación de ejes, nos queda la ecuación de la elipse referidas al sistema original XY:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

1.7. *Ecuaciones de la hipérbola*

Finalmente en esta sección comentaremos brevemente la definición de la hipérbola, que es la cónica que nos falta enumerar.

Definición.

Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es una constante.

Definición.

Los dos puntos fijos son los focos de la elipse. La constante es representada por $2a$.

Para deducir la ecuación de la elipse, consideramos un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la elipse. Por definición la suma de los segmentos $F'P - PF = 2a$, y usando la fórmula para la distancia entre dos puntos, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si la hipérbola tiene su centro en un punto (h, k), usando la técnica de traslación de ejes obtenemos que su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

1.8. Ejercicios y problemas.

1. Resolver los siguientes problemas sobre circunferencias.

   a) Encontrar la ecuación de cada circunferencia en su forma cartesiana y expresarla en forma general.
      1) Centro en $(3, 4)$, radio 5.
      2) Centro en $(-4, 6)$, radio 6.
      3) Centro en $(0, 5)$, radio 8.

   b) Encontrar el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:
      1) $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 49$
      2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 64$
      3) $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 379 = 0$
      4) $3x^2 + 3y^2 + 36x - 12y = 0$

   c) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(7, 9), B(12, -3)$ y $C(-5, -7)$?

   d) ¿Cuál es la gráfica de la circunferencia cuya ecuación es $(x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 4/9$?

   e) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 1/2)$, y de radio igual a $1/4$?

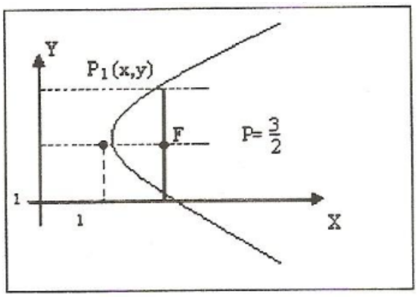
2. Resolver los siguientes problemas sobre parábolas.

   a) ¿Cuál gráfica corresponde a la parábola cuya ecuación es $y^2 = -3x$?

   b) ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco en $(8, 4)$ cuya directriz es $x = 0$?

   c) ¿Cuál es la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 1/2x$?

   d) Observa la siguiente gráfica. De acuerdo con sus datos, ¿cuáles son las coordenadas de su foco?



   e) ¿Cuál es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en el eje Y que pasa por el punto $(-1, 1/2)$?

   f) ¿Cuál es el foco de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4y$?

   g) Una parábola tiene su vértice en el origen y su lado recto mide 20 unidades. Si su eje de simetría coincide con el eje x positivo, ¿cuál es la ecuación de dicha parábola?

3. Resolver los siguientes problemas sobre elipses.

   a) En cada caso, dibuja la gráfica de la elipse cuya ecuación se da y determina la longitud del eje mayor, eje menor, coordenadas de los vértices y de los focos.

      1) $25x^2 + 9y^2 = 2235$
      2) $400^2 + 49y^2 = 1225$
      3) $(\frac{x-1}{4})^2 + (\frac{y-2}{5})^2 = 1$
      4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
      5) $4x^2 + 100y^2 - 1 = 0$
      6) $\frac{x^2}{36} + 9y^2 = 36$

   b) ¿Cuál es la ecuación de la elipse con focos $F'(-4, -6)$ y $F(-4, -2)$ y longitud del lado recto igual a 6 unidades?

   c) Determinar si la ecuación $3x^2 + y^2 + 12x + 10y + 34 = 0$ representa una elipse, un punto o un conjunto vacío.

   d) Determinar si la ecuación $16x^2 + 32y^2 - 8x + 16y + 3 = 0$

   e) Los semiejes mayor y menor de una elipse miden 5 y 3 unidades, respectivamente, ¿cuál es la distancia entre sus focos?