Cimientos Matemáticos

Módulo 13: Conjuntos

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 13. *Conjuntos y logica*

Definición.

Podemos pensar en un **conjunto** como una colección de objetos a los que llamaremos **elementos del conjunto**.
Algunos ejemplos de conjuntos son:

- El conjunto de los días de la semana.
- El conjunto de los meses del año.
- El conjunto de países del continente americano.
- El conjunto de las letras del alfabeto.
- El conjunto de asignaturas que estudias en este semestre.

Usaremos **letras mayúsculas** para darle nombre a cada conjunto, y enlistaremos a sus **elementos entre llaves y separados por comas**.

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo 1.

Si E es el conjunto formado por las estaciones del año, escribimos

$$E = \{\text{primavera, verano, otoño ,invierno }\}$$

Si V es el conjunto formado por las vocales del alfabeto, escribiremos

$$V = \{\text{a,e,i,o,u }\}$$

A esta forma de escribir conjuntos se le suele llamar *forma enumerativa.*

Otra forma es escribir E ={ estaciones del año } y V ={ vocales del alfabeto}

1.0.1. *Símbolos de pertenencia*

Definición.

Usaremos el simbolo $\in$ para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, y el símbolo $\notin$, para indicar que no pertenece al conjunto, así:

$b \in X$ puede leerse como *"b es elemento de X", "b pertenece a X" o "b está en X"*,

$c \notin X$ puede leerse *"c no es elemento de X", "c no pertenece a X" o ç no está en X".*

Ejemplo 2.

Por ejemplo, consideremos el conjunto D formado por todos los días de la semana. Con símbolos podemos escribir que: lunes $\in D$, miercoles $\in D$, o Sabado $\in D$, pero diciembre $\notin D$.

1.0.2. Condiciones de pertenencia.

Para ilustrar este punto, pensemos en el conjunto D de nuestro ejemplo anterior. Sabemos cuántos y cuáles son los días de la semana pero imaginemos que queremos referirnos a aquellos días de la semana que cumplen la condición de ser días hábiles. En este caso estamos imponiendo una *condición* sobre los elementos del conjunto. La manera de escribir esto con símbolos es como sigue:

Si llamamos E a este nuevo conjunto,

$$E = \{\ x \in D|\ \text{x es una habil}\ \}$$

Aquí la x es una **variable**, que puede representar cualquier elemento de D, el símbolo "—", se lee *"tal que" o "tales que"*, y el enunciado que aparece después de él, es la *condición* que deben cumplir los elementos para poder estar en el conjunto E que estamos construyendo.

De este modo, el conjunto se lee: E es el conjunto formado por todos los elementos x del conjunto D, *tales que x* es un día hábil.

Ejemplo 3.

Sea L el conjunto de todas las letras de nuestro alfabeto y digamos que queremos formar el conjunto de vocales V, escribimos:

$$V = \{x \in L|\ \text{x es una vocal}\ \}$$

que se leería: L es igual al conjunto formado por todos los elementos x del conjunto L, tales que x es una vocal. Así, L es el conjunto {a, e, i, o, u}.

Ejercicio 1.

Sea A el conjunto de todas las letras del alfabeto. Escribe en forma enumerativa los siguientes conjuntos.

1. $V = \{\ x \in A|$ x es una letra vocal$\}$
2. $C = \{\ x \in A|$ x es una consonante $\}$
3. $N = \{x \in V|$ x se usa para escribir tu nombre completo $\}$

   Considera $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Escribe en forma enumerativa los siguientes conjuntos.
4. $P =\{\ x \in X|$ x es par$\}$
5. $Q = \{\ x \in X|$ x es menor que 5$\}$
6. $R = \{\ x \in P|$ x es menor que 5$\}$

1.1. Conceptos importantes.

1.1.1. Cardinalidad.

Definición.

La cardinalidad de un conjunto A es el número de elementos que tiene el conjunto A. Se suele denotar por $\#A$ = cardinalidad del conjunto A = número de elementos que tiene A.

La cardinalidad de un conjunto puede ser un número finito como en los ejemplos anteriores o bien podría ser infinita. Veremos ejemplos de conjuntos infinitos más adelante cuando comencemos a estudiar los números naturales que son muy importantes.

Por ejemplo, la cardinalidad de $E = \{\text{estaciones del año}\}$ es $\#E = 4$, pues E tiene cuatro elementos. La cardinalidad de $M = \{\text{meses del año}\}$ es $\#M = 12$. La cardinalidad de $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$ es $\#A = 5$.

1.1.2. *Conjunto vacio*

Definición.

Un conjunto que no tiene elementos se llama **conjunto vacío**, se denota por

$$= \{\}$$

y *su cardinalidad es cero*. Por ejemplo, digamos que $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y queremos formar el conjunto $A = \ x \in M$ — x es menor que 0. Podemos ver que A es un conjunto vacío, pues dentro del conjunto M no hay elementos que cumplan la condición de ser menor que 0, así que $A =$. El conjunto vacío suele aparecer con frecuencia, y será importante entender algunas de sus propiedades que veremos más adelante.

1.1.3. *Subconjuntos*

Definición.

Un conjunto A es **subconjunto** de otro conjunto B, si cada elemento de A es, a su vez, un elemento de B. En símbolos escribimos $A \subseteq B$ para indicar que A es un subconjunto de B. También se suele decir que A **está contenido** en B. El símbolo $\subseteq$ se llama símbolo de **contención**.

Por ejemplo, si decimos que $L = \{$todas las letras del alfabeto $\}$ y $V = \{$vocales del alfabeto$\}$, es claro que V es un subconjunto de L, porque toda vocal es, a su vez, una letra del alfabeto. En símbolos: $V \subseteq L$.

<u>Observación importante:</u> Todo conjunto es subconjunto de sí mismo, y el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. En símbolos, si A es cualquier conjunto, entonces se tiene que $A \subseteq A$, y que $\subseteq A$.

1.1.4. Igualdad entre conjuntos.

Definición.

Dos conjuntos A y B son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos. Más precisamente: Se deben verificar dos cosas:

1. Cada elemento de A es también elemento de B.
2. Cada elemento de B es también elemento de A.

En otras palabras, se deben cumplir dos contenciones: $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si las dos contenciones se cumplen, entonces escribimos $A = B$. Por el contrario, escribimos $A \neq B$ para indicar que A y B no son iguales, o bien, que son diferentes.

Por ejemplo, Si $A = \{$a, e, i, o, u $\}$ y $B = \{$a, o, e, u, i $\}$, podemos afirmar que A es subconjunto de B, ya que cada elemento de A es también un elemento de B, y también podemos afirmar que B es un subconjunto de A, por lo tanto $A = B$. Como puede verse aquí, al enumerar los elementos de un conjunto el orden en que se enumeran no es importante.

1.1.5. Subconjuntos propios.

Definición.

Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, decimos que A es **subconjunto propio** de B. O sea que A es solo una parte del conjunto B, pero <u>no todo</u>. Simbólicamente scribimos $A \subset B$, para indicar que A es subconjunto propio de B.

Por ejemplo podemos decir que el conjunto $V = \{$vocales del alfabeto$\}$ es un subconjunto y de hecho que es un subconjunto propio de $L = \{$todas las letras del alfabeto $\}$.

Ejercicio 2.

En cada inciso escribe si $A \subseteq B$ o si $B \subseteq A$. Si se dan las dos contenciones, escribe $A = B$. Si no se da ninguna contención, escribe "no son comparables".

1. A = {perros negros que tienen manchas blancas }, B = {perros negros que tienen una mancha blanca}
2. A = {perros negros}, B = {perros blancos que tienen manchas negras }.
3. A = {números pares }, B = {0, 2, 4, 6, 8 }
4. A = {cuadrados}, B = {rectángulos}
5. A = {figuras planas}, B = {círculos}
6. A = {cuadriláteros equiláteros }, B = {rombos }
7. A = {vehículos con más de dos ruedas}, B = {vehículos con menos de tres ruedas}.

1.2. Conjunto de números naturales.

Definición.

Probablemente recuerdes el conjunto de números naturales:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...\}$$

El conjunto **N** es **infinito**, es decir, tiene un primer elemento: el 1, pero no tiene un último elemento. Más bien dicho: **N** tiene cardinalidad infinita.

Nota: Algunos autores o en algunos cursos consideran al 0 como el primer número natural. Nosotros llamaremos naturales a los enteros mayores que cero en este curso, es decir, sin tomar en cuenta al cero como número natural.

1.2.1. Múltiplos de un número.

Definición.

Si escogemos un número natural cualquiera, por ejemplo 8, un **múltiplo** de 8 es cualquier número que se obtenga como resultado de multiplicar 8 por algún número natural. Por ejemplo el 56, el 40 y el 24 son múltiplos de 8, pues se pueden obtener al multiplicar 8 por 7, por 5 y por 3, respectivamente.

En general, digamos que n es un número natural cualquiera. Un **múltiplo** de n es cualquier número que se obtenga como resultado de multiplicar de n por algún número natural k. Si queremos enumerar todos los múltiplos de 7, veremos que es un conjunto infinito. Si llamamos M(7) a este conjunto, podemos escribir:

$$M(7) = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, ...\}$$

Si k es cualquier número natural, denotaremos por M(k) al conjunto de todos los múltiplos de k, así:

$$M(k) = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, ...\}$$

1.2.2. *Divisores de un número*

Definición.

Dado cualquier número natural m, decimos que n es **un divisor**de m, si al hacer la división m entre n, el residuo es cero.

En otras palabras, decimos que n es un divisor de m, si existe otro natural q tal que al multiplicar n por q, nos dé como resultado m.

Por ejemplo:

- 3 es un divisor de 24, ya que 8 × 3 = 24.
- 4 es divisor de 16, ya que 4 × 4 = 16.

Notemos que los múltiplos y los divisores están relacionados mediante la siguiente *observación*: es equivalente decir que n es divisor de m a decir que m es múltiplo de n.

Vamos a denotar por $D(m)$ al conjunto de divisores del número m. A diferencia de los múltiplos, *el conjunto de divisores de un número es siempre un conjunto finito.*

Ejemplo 4.

- $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$
- $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
- $D(27) = \{1, 3, 9, 27\}$

Notemos que el 1 es divisor de cualquier número y todo número es divisor de sí mismo.

1.2.3. *Números primos y compuestos*

Definición.

Veamos que hay números que solo tienen dos divisores, por ejemplo el 17, el 29 o el 31, que solo se pueden dividir entre sí mismos y entre 1. A esos números se les llama números *primos.*

Números primos. Son los que tienen sólo dos divisores, es decir, solamente son divisibles entre sí mismos y entre la unidad. Ejemplos. $17, 13, 11, 23, 31, 43, 7, 29$ son números primos.

Números compuestos. Son los que tienen más de dos divisores. O sea que además de ser divisibles entre sí mismos y entre 1, lo son entre más números.

Ejemplos. $9, 12, 15, 18, 20, 21, 40, 60, 63$ son números compuestos.

Ejercicio 3.

A continuación se dan unos conjuntos escritos en forma descriptiva. Escríbelos en su forma enumerativa y escribe su cardinalidad.

1. $\{x \in \mathbf{N}|$ x es múltiplo de 3 menor que 18 $\} = \{9, 6, 3, 15, 12\}$.
2. $\{x \in \mathbf{N}|$ x es número primo menor que 11$\}$.
3. $\{\ x \in \mathbf{N}|x < 0\}$
4. $\{\ x \in \mathbf{N}|0 < x < 4$ y x es impar $\}$
5. $\{\ x \in \mathbf{N}|0 < x < 2\}$
6. $\{x \in \mathbf{N}|x < 3\}$
7. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es par menor que 8 $\}$
8. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es divisor de 6 $\}$
9. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es múltiplo de 2 $\}$
10. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es divisor de 12 $\}$
11. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es un número impar menor o igual que 7 $\}$
12. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es un número impar mayor que 1 y menor que 5 $\}$
13. $\{x \in \mathbf{N}|x$ es un número compuesto menor que 12 $\}$
14. $\{x \in \mathbf{N}|x = 2\}$
15. $\{x \in \mathbf{N}|x5\}$

1.3. *Operaciones con conjuntos*

Así como podemos hacer operaciones con números naturales, podemos hacer operaciones de conjuntos. Si tenemos dos conjuntos podemos hacer con ellos dos operaciones que llamaremos UNIÓN e INTERSECCIÓN.

1.3.1. *Unión de dos conjuntos*

Definición.

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por elementos que están en A ó están en B (o en ambos). Se denota

$A \cup B =$ A unión con B

$$A \cup B = \{x | x \in A \quad o \quad x \in B\}$$

Ejemplo 5.

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Hallar la unión de A con B.

Solución. La unión es el conjunto

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c, d, f\}$$

Ejemplo 6.

Si $P = \{x \in \mathbf{N} | x$ es divisor de 12 $\}$ y $Q = \{x \in \mathbf{N} | x$ es menor que 6 $\}$. Hallar $P \cup Q$.

Solución. Escribiéndolos primero en forma enumerativa, quedan escritos como $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Así es fácil ver que la unión sería el conjunto $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$.

Notemos que, para hallar la unión de dos conjuntos, basta incluir a los elementos tanto de uno como del otro conjunto.

Ejemplo 7.

Considérense los siguientes conjuntos:

A = {vehículos con más de dos ruedas }, B = {vehículos con menos de tres ruedas }. ¿Cuál es el conjunto $A \cup B$?

*Solución.*En este ejemplo tenemos dos conjuntos que no nos es posible enumerar. Tenemos que apelar entonces a la definición de unión. La unión de dos conjuntos es el conjunto que consta de los elementos que bien están en A ó bien están en B. Dicho de otra manera:

$A \cup B = \{ x | x$ es un vehículo con más de dos ruedas ó x es un vehículo con menos de tres ruedas$\}$.

Analizando el significado de los símbolos anteriores comprenderemos que $A \cup B$ es el conjunto de aquellos vehículos que pueden tener $1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ o cualquier número natural de ruedas. Por supuesto que en la vida real será difícil encontrar un vehículo que tenga un millón de ruedas, pero al menos hipotéticamente, de existir tal vehículo debería estar incluido en el conjunto $A \cup B$.

1.3.2. *Propiedades de la unión*

Definición.

Vamos a enumerar algunas propiedades de la operación ünión". Es decir hechos que pasan en la unión de cualesquiera dos conjuntos A y B.
Si A, B y C son conjuntos cualesquiera:

1. $A \cup B = \cup A$
2. $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$
4. Si $A \cup B = B$ entonces $A \subseteq B$
5. $A \cup = A$

1.3.3. *Intersección de dos conjuntos*

Definición.

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que están en A y en B (simultáneamente). Se escribe.

$A \cap B =$ A intersección con B

$$A \cap B = \{x | x \in A \quad y \quad x \in B\}$$

Ejemplo 8.

Hallar la intersección de los conjuntos A y B del ejemplo 1.

Solución. $A = \{a, e, i, o, u\}$y $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. La intersección está formada por los elementos que al mismo tiempo pertenecen a A y a B, es decir, los elementos comunes, que en este caso son a y e, por lo que

$$A \cap B = \{a, e\}$$

Ejemplo 9.

Hallar la intersección de los conjuntos P y Q dados en el ejemplo 2.

Solución. $P = \{x \in \mathbf{N}|$ x es divisor de 12 $\}$ y $Q = \{x \in \mathbf{N}|x$ es menor que 6 $\}$, o bien, en forma enumerativa.

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \qquad y \qquad Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

La intersección es por tanto $P \cap Q = \{1, 2, 3, 4\}$. Son los elementos que están en P y también en Q.

1.3.4. *Propiedades de la intersección*

Definición.

Sean A, B y C conjuntos.

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$
4. Si $A \cap B = A$, entonces $A \subseteq B$
5. $A \cap =$

1.3.5. Conjunto complemento.

Para esta operación necesitamos fijar nuestra atención a un conjunto al que llamaremos **conjunto universal**. Cualquier conjunto, de preferencia no vacío, puede ser consideradocomo conjunto universal. La única condición que debe cumplir este conjunto es que todos los demás conjuntos que vayamos a considerar estén contenidos en él. Por ejemplo si vamos a estudiar números y sus propiedades de divisibilidad y multiplicación, conviene que nuestro conjunto universal sea **N**. Si vamos a escribir un directorio por orden alfabético y necesitamos considerar ciertas letras como las primeras, o las vocales, etc., quizás convenga que nuestro conjunto universal sea L = letras del alfabeto. O si estamos en un grupo grande de estudiantes y deseamos representar cuáles grupos de amigos son los que se llevan mejor, conviene que el conjunto universal sea el conjunto de estos alumnos. A diferencia de los conceptos que hemos visto, el conjunto universal no es algo que esté definido previamente. Cualquier conjunto puede funcionar como conjunto universal. Vamos a usar la letra U para denotar a un conjunto universal.

Definición.

Si U es el conjunto universal y A es un conjunto cualquiera. El complemento de A el conjunto formado por los elementos del total U que NO están en el conjunto A. Se denota

A^c = Conjunto complemento de A

$$A^c = \{z \in U | x \notin A\}$$

Ejemplo 10.

Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es el conjunto universal, hay un conjunto $A = \{2, 4, 6, 7, 9\}$. ¿Cuál es el complemento de A?

Solución. El complemento de A estará formado por aquellos elementos de U que no estén en A, y será

$$A^c = \{1, 3, 5, 8, 10\}$$

También se puede decir que el complemento de un conjunto está formado por los elementos que le faltan a A para completar el conjunto universal, pues notemos que

$$A \cup A^c = U$$

Ejmplo 7.

7. Si $U = \{\text{Todas las letras del alfabeto}\}$ y $M = \{\text{vocales del alfabeto}\}$. ¿Cuál es M^c?

*Solución.*En este caso nuestro conjunto universal está formado por todas las letras del alfabeto $(a, b, c, ...x, y, z)$. M es el conjunto formado por las vocales a, e, i, o, u, luego el complemento de M estará formado por las letras del alfabeto que NO son vocales, es decir, las consonantes

$$M^c = \{\text{ Consonantes del alfabeto }\}$$

Nuevamente notemos que la unión de M con M^c , nos da todo el conjunto universal.

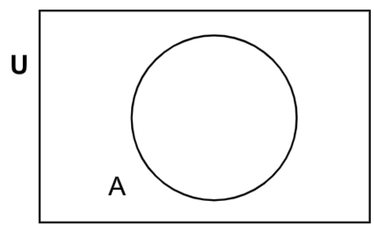
Definición.

Propiedades del complemento:

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cup A^c = U$
3. $A \cap A^c =$
4. $^c = U$

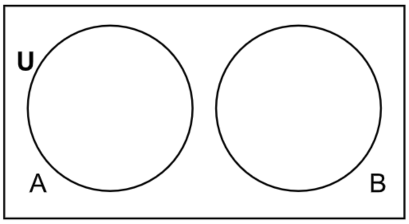
1.3.6. Representación gráfica de conjuntos.

Vamos a ver ahora una manera de representar gráficamente a los conjuntos que estamos trabajando. Ésta representación se conoce como *Diagramas de Venn* y consiste sencillamente en un rectángulo que representará a nuestro conjunto universal S, dentro del cual puede haber algún conjunto.

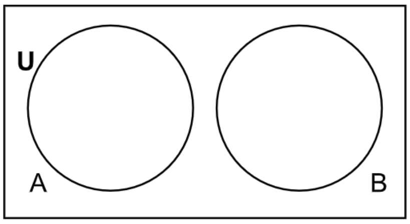


Al representar dos conjuntos A y B cualesquiera, debemos considerar tres posibilidades:

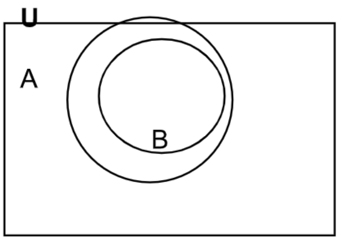
1. Que sean disjuntos. Dos conjuntos A y B se dice que son disjuntos si no tienen ningún elemento en común. (La intersección es el conjunto vacío).



2. Que sean No disjuntos. Es decir, tienen al menos un elemento en común.

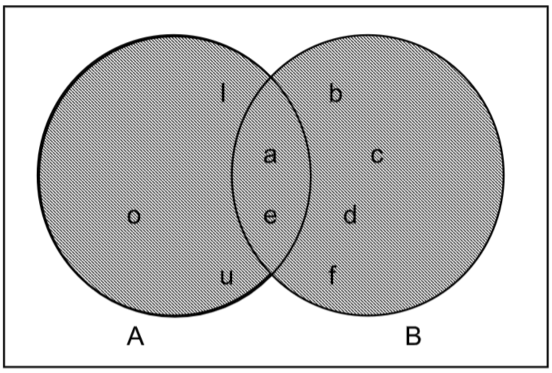


3. Que uno este contenido en el otro. Por ejemplo B es subconjunto de A.

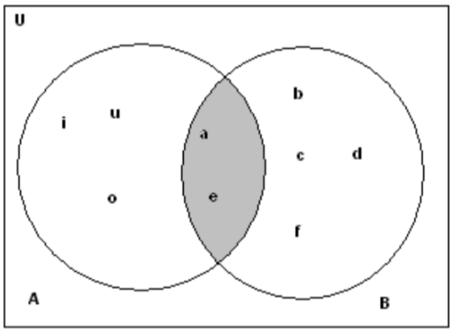


Las operaciones con conjuntos pueden representarse con Diagramas de Venn de la siguiente manera.

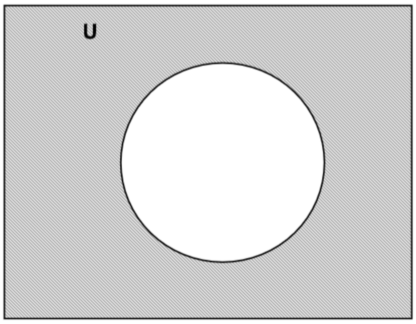
Unión de dos conjuntos. Por ejemplo si $A = \{a, e, i, u, o\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, la unión de A y B puede representarse así:
La región sombreada representa el conjunto $A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c, d, f\}$.



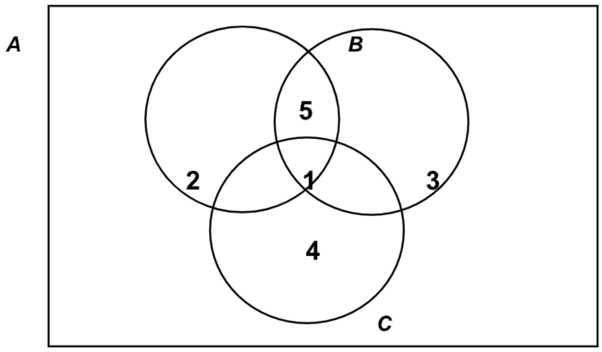
Intersección de dos conjuntos: Si A y B son los conjuntos descritos arriba, su intersección será:
La región sombreada es $A \cap B = \{a, e\}$



Conjunto complemento: Sea A un conjunto cualquiera del conjunto universal U. El complemento de A, o sea A^c se representa:



Para tres conjuntos que se intersectan, se puede representar su partición mediante un diagrama de Venn como el siguiente:



1. $A \cap B \cap C$
2. $A \cap B^c \cap C^c$
3. $B \cap A^c \cap C^c$
4. $C \cap A^c \cap B^c$
5. $A \cap B \cap C^c$

Ejercicio 4.

Encuentra el conjunto que resulta de las operaciones con conjuntos que se te indican en cada inciso. Usa la forma enumerativa para dar tu respuesta.

1. La unión de los conjuntos $P = \{e, i, o, u\}$ y $Q = \{a, b, c, d, e\}$.
2. La intersección de los conjuntos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $\{2, 3, 5, 7, 11\}$.
3. La unión de los conjuntos $\{4, 6, 8, 12\}$ con $\{4, 8, 16\}$.
4. La unión delos conjuntos $F = \{x \in \mathbf{N} | x \text{ es menor o igual que } 5\ \}$ y$G = \{x \in \mathbf{N} | x < 4\}$.
5. La intersección de $F = \{x \in \mathbf{N} | x < 6\}$ y $G = \{x \in \mathbf{N} | x \text{ es impar menor que } 9\ \}$.
6. Si U = {números primos menores que 20 }, hallar el complemento de {3, 7, 13, 19}.
7. El complemento de $T = \{1, 2, 4, 8\}$ en $U = \{x \in \mathbf{N} | x < 9\}$
8. Si $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $S = \{2, 4, 6, \}$, encontrar $R \cap S$.
9. Sean $P = \{x \in \mathbf{N} | x = 4 - x\}$ y $Q = \{x \in \mathbf{N} | x \text{ es par menor que } 6\}$. Hallar $P \cap Q$.
10. El complemento del conjunto $\{6, 12, 18\}$ en $U = \{x \in \mathbf{N} | x \text{ es par menor que } 20\ \}$.

Ejercicio 5.

Sean P, Q y R tres conjuntos cualesquiera. Representa gráficamente cada operación con conjuntos mediante un Diagrama de Venn.

1. $P \cap Q$
2. $P \cap Q$
3. $(P \cap Q)^c \cap R$
4. $P^c \cap Q$
5. $P \cup Q^c$
6. $P^c \cap Q^c$
7. $P^c \cup Q^c$

1.4. Lógica de proposiciones.

Definición.

Vamos a distinguir entre dos tipos de razonamiento: *el deductivo y el inductivo*. Cuando partimos de observaciones de casos particulares para obtener una conclusión general, estamos haciendo un razonamiento *inductivo*. Por ejemplo: "Antier llovió, ayer llovió, hoy llovió. Por lo tanto mañana lloverá".

Otro ejemplo de razonamiento inductivo es: "El lunes llegué tarde a clase y me enviaron a la dirección, el martes llegué tarde a clase y me enviaron a la dirección, el miércoles llegué tarde a clase y me enviaron a la dirección. Hoy estoy llegando tarde a clase. Con base en las observaciones de los días anteriores concluyo que me enviarán a la dirección".

Por otro lado el razonamiento deductivo parte de una afirmación general que se toma como verdadera y se usa para obtener una conclusión particular. Por ejemplo: "En el reglamento de la escuela se estipula que todo aquel alumno que llegue tarde a clase será enviado a la dirección. Juan llega tarde hoy a clase y como conoce el reglamento concluye: me enviarán a la dirección."

Ejercicio 6.

Escribe 3 ejemplos de situaciones en las que se use un razonamiento inductivo y 3 ejemplos en las e se use un razonamiento deductivo.

Una *proposición* es un enunciado que puede ser calificado de falso o verdadero. Por ejemplo:

"Un perro es un mamífero".
"Monterrey es la capital de Guanajuato".

Estas dos proposiciones se pueden calificar como falsas o verdaderas. La primera es verdadera y la segunda es falsa. En cambio la siguiente:

"Manuel tiene una motocicleta."

No es una proposición, ya que al no especificar de cuál Manuel se trata no podemos decidir con certeza si el enunciado es falso o verdadero.

Ejercicio 7.

Escribe 5 enunciados que sean proposiciones y a la derecha escribe F si es falsa o V si es verdadera.

Definición.

Proposiciones abiertas. Una proposición abierta es un enunciado en el que interviene alguna variable, por ejemplo:

"X es un número par"

Aquí, la variable x puede representar un elemento de algún conjunto. Se debe especificar a cuál conjunto pertenece, así que escribimos:

"x es un número par $x \in$"

De esta manera sabemos que x representa un número natural cualquiera.

¿Cómo decidir si esa proposición es falsa o verdadera? Para esto necesitamos reemplazar la x por todos y cada uno de los números naturales, 1, 2, 3, etcétera. Evidentemente como son infinitos eso sería imposible. Entonces para proposiciones abiertas, como esta, no vamos a decir si son falsas o verdaderas sino más bien vamos a escribir su *conjunto de verdad* o también llamado *conjunto solución.* El conjunto solución de una proposición abierta, es el conjunto de aquellos valores de la variable x que hacen verdadera a la proposición. Así en el ejemplo

El conjunto solución es$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$.

Ejercicio 8.

Escribe el conjunto de verdad de las siguientes proposiciones.

1. "x es un número que tiene raíz cuadrada exacta" "$x \in$
2. "x es un número que termina en 5" $x \in$
3. "x es un número divisible entre 4" $x \in$
4. "x es una vocal de la palabra azucaradito"$x \in \{$vocales$\}$.
5. "x es un país cuyo nombre empieza con M" $x \in \{$países$\}$.

1.5. Proposiciones compuestas.

Hay tres tipos de proposiciones compuestas que vamos a estudiar:

1. La disyunción
2. La conjunción
3. La implicación.

Cada una de ellas se caracteriza por llevar un *conectivo lógico* especial y su *valor* de *verdad* o su *conjunto de verdad*, según la proposición sea simple o abierta, se determina siguiendo reglas lógicas muy específicas.

Definición.

La disyunción. Esta proposición se caracteriza por llevar el conectivo lógico "$\vee$";. Se podría decir que una disyunción se forma con dos proposiciones conectadas mediante una .º ". Un ejemplo de disyunción es:

"Juan tiene 30 años ó Monterrey es un estado"

Notemos que las proposiciones que forman la disyunción pueden o no tener relación una con la otra. Veamos otro ejemplo.

"Bombay es una isla ó 200 es un número impar"

Los dos ejemplos anteriores son proposiciones *simples.* Esto significa que debemos ser capaces de determinar su valor de verdad. El valor de verdad de una disyunción es *verdadero* si alguna de las proposiciones componentes es verdadera, y es *falso* si ambas proposiciones componentes son falsas.

Definición.

La conjunción. Es una proposición compuesta por dos proposiciones simples unidas mediante el conectivo lógico ӡ". Por ejemplo.

.En invierno hace mucho frío y tengo los dientes chuecos".

Claro que el valor de verdad en ese ejemplo puede depender de quien lee la proposición y del lugar donde vive. Veamos un ejemplo más claro:

"40 es menor que 15 y Bogotá es la capital de Colombia"

El valor de verdad de una conjunción es verdadero solamente cuando las dos proposiciones que la componen son verdaderas. Si una de ellas es falsa, entonces la conjunción será falsa. Así el ejemplo anterior tiene valor de verdad falso.

Ejercicio 9.

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

1. México tiene 50 estados o Morelia es la capital de Michoacán.
2. 14 es un número primo y 16 es un número compuesto.
3. 2 es la raíz cuadrada de 4 y 22 es el doble de 11.
4. Luis Miguel nació en Puerto Rico o Venezuela es un país.
5. Los perros nunca duermen o el azul es el color más oscuro.
6. 23 es un número primo y -1 es menor que cero.

Veamos ahora qué pasa si tenemos conjunciones o disyunciones abiertas, es decir, aparece una variable en las proposiciones. Considera el siguiente ejemplo:

"x es un número par ó x es un número impar"$x \in$

Recordemos que al ser abierta la proposición no buscamos su valor de verdad sino su conjunto de verdad. Esto porque la proposición abierta puede ser verdadera o falsa, dependiendo del valor que se le asigne a x. Analicemos cada componente:

"x es un número par", $x \in \mathbf{N}$. Su conjunto de verdad es $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

"x es un número impar", $x \in \mathbf{N}$. Su conjunto de verdad es {1, 3, 5, 7, 9, ... }

Como hemos visto, para que la disyunción sea verdadera se necesita que las dos componentes sean verdaderas. Por lo tanto el conjunto solución de una disyunción corresponde a la *unión* de los conjuntos solución de las dos componentes. Es decir:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}.$$

Por otro lado, en una conjunción abierta, el conjunto de verdad corresponderá a la intersección de los conjuntos de verdad de las dos componentes. Por ejemplo:

"x es un número menor que 4 y x es múltiplo de 3, $x \in \mathbf{N}$

El conjunto de verdad será:$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 6, 9, 12, ...\} = \{3\}$.
Esto porque como hemos visto, para que una conjunción sea verdadera necesitamos que ambas proposiciones componentes sean verdaderas. En el ejemplo anterior el único valor que hace verdaderas a ambas proposiciones es el 3.

Ejercicio 10.

Encuentra el conjunto solución o conjunto de verdad de las siguientes proposiciones.

1. "x es un divisor de 10, $x \in \mathbf{N}$"
2. "x un número impar y x es divisor de 18, $x \in \mathbf{N}$"
3. "x es divisor de 20 o $x < 5$, $x \in \mathbf{N}$"
4. "$x > 1$ y $x > 10$, $x \in \mathbf{N}$
5. "x es par y $x \geq 6, x \in \mathbf{N}$"
6. "x es múltiplo de 2 o x es múltiplo de 8, $x \in \mathbf{N}$"

Definición.

La implición. Una implicación es una proposición de la forma

Si P entonces Q

Aquí, tanto P como Q son proposiciones que pueden ser simples o abiertas. Por ejemplo:

"Si no apruebo el examen, entonces mi mamá se pondrá muy triste."

A veces puede omitirse el conectivo *entonces* y simplemente escribimos:

"Si no apruebo el examen, mi mamá se pondrá muy triste."

La estructura del enunciado hace que aún sin escribir la palabra .^{en}tonces"se entienda el enunciado.
Otras formas de escribir una implicación son:

Q si P

Por ejemplo, voy a llegar tarde si no empiezo a arreglarme ahora.

Estos son ejemplos cotidianos de implicaciones. Veamos unas proposiciones matemáticas, que son las que nos interesa estudiar:
"Si una figura geométrica tiene cuatro lados, entonces es un paralelogramo".
"Si un número es par, entonces es divisible entre dos.
"Si 15 divide a 45 entonces 15 divide a 90".

Las implicaciones son muy importantes en matemáticas y en todas las ciencias por lo que vale la pena entender bien su estructura. Una implicación puede escribirse en forma simbólica así:

$$P \implies Q$$

Esto se puede leer: Si P entonces Q.
También puede leerse: P implica Q.
P se llama *antecedente* y Q se llama *consecuente.*

Si volteamos el orden de P y Q obtenemos otra implicación llamada la conversa. Por ejemplo, considérese la siguiente implicación:

"Si llueve, entonces me mojo"La conversa sería: "Si me mojo, entonces llueve."

Obsérvese que una implicación y su conversa pueden tener distinto valor de verdad, es decir, una implicación puede ser verdadera, mientras su conversa falsa. Por ejemplo:

- "Si un número es divisible entre 4 entonces es divisible entre 2". Esta implicación es verdadera. La conversa sería:
- "Si un número es divisible entre 2 entonces es divisible entre 4".Evidentemente esto es falso, pues el número 2 es un ejemplo de un número que es divisible entre 2 pero que no es divisible entre 4.

Ejercicio 11.

Escribe la conversa de cada una de las siguientes implicaciones.

1. Si x es divisor de 21, entonces x es divisor de 7, $x \in \mathbf{N}$
2. Si una figura geométrica es un cuadrado, entonces es un paralelogramo.
3. $9 - 5 = 4 \implies 4 + 5 = 9$
4. Si x es un número primo, entonces x es mayor que 1
5. Si un río está en China, entonces está en Asia.
6. Si un río está en China, entonces está en Asia

1.6. La negación.

Finalmente hemos de echarle un vistazo a la negación. Muchos problemas de interpretación se cometen por el hecho de no entender cómo negar proposiciones.

Una manera de negar una proposición es simplemente anteponer la frase .es falso que". Por ejemplo:

"Todos los números son pares"

Su negación es: .Es falso que todos los números son pares".

Reflexionando un poco acerca del lenguaje, los conectivos y los cuantificadores (palabras que indican cantidad) se puede ver que hay distintas maneras equivalentes de escribir una negación. Otra manera sería:

.No todos los números son pares.

O bien : .Existe un número que no es par.
Un error que se comete cuando no se reflexiona sobre la lógica y las palabras es pensar que para negar hay que afirmar lo contrario. Cosa que no es para nada cierta. La proposición

Todos los números son impares.

No expresa la negación de: Todos los números son pares.

En general, cuando una proposición aparece con el cuantificador *todos*, o *para todo*, la negación deberá incluir el cuantificador *existe*, o *algún* seguido de la negación de la proposición en cuestión. Por ejemplo:

Todas las niñas tienen el cabello castaño.

Su negación lógica es: Existe una niña que NO tiene el cabello castaño".

Por el contrario, si en una proposición apareciera el cuantificador *existe*, su negación deberá incluir el cuantificador *para todo o todos / todas*, así como la negación de la acción expresada por la proposición original. Por ejemplo:

Existe un hombre que mide más de 2 metros

Su negación lógica es: Todo hombre mide menos de 2 metros.

Lo cual es lógicamente equivalente a decir "No existe un hombre que mide más de 2 metros.o "Ningún hombre mide más de 2 metros".

En la negación de las proposiciones compuestas como conjunción y disyunción, la lógica también sigue reglas bien establecidas:

1. La negación de una conjunción es la negación de las disyunciones.

2. La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones.

Esto significa que si en una proposición compuesta aparece el conectivo lógico ɛ”, en la negación deberá aparecer .º.ªdemás de negar cada una de las proposiciones componentes. Si aparece el conectivo ”ó”, en la negación debe aparecer ɛ.ªdemás de negar cada una de las proposiciones componentes.

Ejercicio 12.

Escribe la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

1. x es un número compuesto menor que 9, $x \in \mathbf{N}$
2. x es menor que 5 o x es mayor que 2, $x \in \mathbf{N}$
3. x es múltiplo de 5 y x es par, $x \in \mathbf{N}$
4. $x < 0$ o $x > 4$, $x \in \mathbf{N}$
5. x es un número compuesto, $x \in \mathbf{N}$
6. x es un número par, $x \in \mathbf{N}$

1.7. *Ejercicios y problemas*

1. Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinar en la forma enumerativa los siguientes conjuntos:
   a) $S = \{x \in M|x$ es menor que $5\}$
   b) $L = \{x \in M|x + 1$ es igual a $5\}$
   c) $T = \{x \in M|x + 2$ es mayor que $4\}$
   d) $W = \{x \in M|x$ es diferente de $2\}$
   e) $V = \{x \in M|x$ al cuadrado es $9\ \}$
2. Si llamamos $\mathbf{N}$ al conjunto de números naturales,
   a) ¿Es $\mathbf{N}$ un conjunto infinito? ¿por qué?
   b) Si $P = \{x \in \mathbf{N}|x$ es menor que $9\}$, ¿Es P un conjunto finito? ¿Por qué?
   c) ¿Cuál es la cardinalidad de P?
3. Para cada conjunto que se nombra, indicar si es finito o infinito.
   a) Los puntos de una recta.
   b) Las islas de todo el mundo.
   c) Los pelos de un gato.
   d) El conjunto de los números enteros impares mayores que 5.
   e) El conjunto de los números enteros.
4. Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Expresa en forma enumerativa los elementos de los conjuntos que se proponen a continuación.
   a) $M = \{x \in \mathbf{R}|x$ es menor que $1\}$
   b) $S = \{x \in \mathbf{R}|x \cdot x = 64\}$
   c) $T = \{x \in \mathbf{R}|x + 7 = 25\}$
   d) $V = \{x \in \mathbf{R}|x + 3 = 7\}$
5. Considerando el conjunto $W = \{1, 2, 3, 4\}$ forma un conjunto con todos los subconjuntos de W que tengan
   a) Cardinalidad 4 y llámalo K.
   b) Cardinalidad 3 y llámalo L.
   c) Cardinalidad 2 y llámalo M.
   d) Cardinalidad 1 y llámalo N.

e) Cardinalidad 0 y llámalo P.

6. Toma el conjunto $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ como conjunto universal y considera los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{2,3,4,5\}$,$D = \{7,8,9,10\}$ Determina los conjuntos que se indican y representa la operación gráficamente mediante un Diagrama de Venn, sombreando el resultado.

   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B^c$
   c) $(C \cup D)^c$
   d) $D \cap B$
   e) $B \cap C$
   f) $C \cup (A \cap B)$
   g) $(A \cap B)^c$

7. Para cada enunciado indicar si se trata de una proposición o no.

   a) ¿Qué es x?
   b) Un número par.
   c) 4 más 4.
   d) La tarde es bella.
   e) El tiburón es un pez.
   f) Se prohíbe pisar el pasto.
   g) El atardecer es la hora del romance.
   h) El libro está bien escrito.
   i) Alicia resolvió su examen completo.
   j) El mar Mediterráneo está en América.
   k) El país obtuvo su independencia en 1910.
   l) La liebre vuela.
   m) El domingo nevará.
   n) La casa es de papel.

8. Encuentra el conjunto solución de las siguientes proposiciones.

   a) x es primo menor que 10 ó x es impar menor que 13 $x \in \mathbf{N}$
   b) $2x = 3x - 4$, $x \in \mathbf{N}$
   c) $x^2 + x - 3 = x^2 - 1, xin\mathbf{N}$
   d) $x < 1$ o x es par, $x \in \mathbf{N}$
   e) $x + 2 = -x - 2, x \in \mathbf{N}$

9. Escribe la conversa de:

   a) ”Si llueve mucho, entonces el caudal del río aumenta”.
   b) ”Si 12 ¿ 7, entonces 11 ¿ 6”.
   c) ”Si una persona es veracruzana, entonces es mexicana”.
   d) ”Si la suma de los dígitos de un número es múltiplo de 3, entonces el número es divisible entre 3.
   e) ”Si un animal es una paloma, entonces es un ave”.

10. Escribe la negación.

   a) Todos los ciudadanos son humanos.
   b) Ningún número primo es par.
   c) Al menos un número par es número primo.
   d) x es divisible entre 2 y x es múltiplo de 5, $\in \mathbf{N}$
   e) x es dígito par o x es dígito impar, $x \in \mathbf{N}$
   f) x es número primo y x es menor que 3, $x \in \mathbf{N}$
   g) x es divisible entre 6 o x es múltiplo de 4, $x \in \mathbf{N}$