Cimientos Matemáticos

Módulo 14: Conjuntos importantes

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 14.*CONJUNTOS IMPORTANTES*

1.1. *Los números naturales* $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Son simplemente todos los enteros positivos.

¡Es un conjunto infinito!, ¿Por qué? Pues para empezar tiene un primer elemento ¡pero no tiene un último elemento!. Dado cualquier número natural n, siempre habrá otro mayor a él. Veamos ahora ¿Qué operaciones se pueden hacer en **N**?

Definición.

La suma de números naturales. Esta operación es ya conocida, $3 + 4 = 7, 14 + 56 = 70$ son dos ejemplos. Dados cualesquiera dos números naturales $m, n \in \mathbf{N}$ representamos por $m + n$ al resultado de sumar esos números naturales. En este punto estamos trabajando solamente con números naturales, que son únicamente aquellos números que son enteros y positivos. De modo que aquí no valen resultados con punto decimal, ni fracciones, o cosas por el estilo. Nos interesan sólo números como 4, 305, 257, 12738469, etcétera.

La operación *suma* (+) la hemos aprendido desde pequeños, y ahora es momento de detenernos y reflexionar un poco acerca de sus propiedades.

Definición.

Propiedades de la suma de números naturales.

Dados $m, n, o \in \mathbf{N}$ se satisfacen las siguientes dos propiedades:

1. (N1) $m + n = n + m$
2. (N2) $(m + n) + o = m + (n + o)$.

Estas propiedades se conocen con el nombre de *propiedad conmutativa de la suma* (N1) y *propiedad asociativa de la suma* (N2).

Es crucial comprender que aquí, el signo -"no es visto como símbolo de resultado de una operación. Más bien debes pensarlo como un signo que compara dos números y te dice que son iguales. Por ejemplo $2 = 1 + 1$, es una oración que nos indica que el número 2 y el número 1 + 1 son en realidad el mismo número. Si escribes $2+(3+5) = (2+3)+5$ estás aseverando que la suma de 2 con 3 + 5 representa el mismo número que la suma de 2 + 3 con 5; ambas expresiones representan al número 10. Veamos ahora algunas ecuaciones sencillas.

Ecuaciones aditivas con números naturales.
Dados $a, b \in \mathbf{N}$ hallar $x \in \mathbf{N}$ tal que $a + x = b$.

El enunciado anterior representa un ejercicio típico de los que resolvemos en la secundaria. Cuando lees "dados $a, b \in \mathbf{B}$"debes pensar que a y b son números conocidos, por ejemplo 3 y 5, 15 y 10, etcétera. Tendrías entonces las ecuaciones:

$$3 + x = 5$$

$$15 + x = 10.$$

La primera de ellas tiene una única solución, x = 2, mientras que la segunda no la tiene. Debes preguntarte: *¿A qué le llamamos solución de una ecuación aditiva?*

Como hemos estudiado ya el lenguaje de conjuntos, vamos a definir aquí la solución de una ecuación aditiva en términos de conjuntos:

Definición.

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N} | a + x = b\}$ es el conjunto de números naturales que satisfacen la ecuación $a + x = b$.
Por ejemplo:

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N}|3 + x = 5\} = \{2\}$,

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N}|15 + x = 10\} =$.

Ejercicio 1.

Encontrar el conjunto solución de las ecuaciones aditivas que se dan a continuación:

1. $\{x \in \mathbf{N}|1 + x = 2\}$
2. $\{x \in \mathbf{N}|3 + x = 3\}$
3. $\{x \in \mathbf{N}|4 + x = 5\}$
4. $\{x \in \mathbf{N}|13 + x = 75\}$
5. $\{x \in \mathbf{N}|22 + x = 15\}$

Definición.

La resta de dos números naturales. También conocida como diferencia. ¿Qué es la resta? Dados dos números $a, b \in \mathbf{N}$, la resta no es otra cosa sino el conjunto solución de la ecuación $b + x = a$. Como habrás observado en el ejercicio anterior, la resta no siempre existe (en los números naturales). Puedes hacer 8 - 3, pero no puedes hacer restas como $3 - 8$.

Definición.

El producto de números naturales. El producto, conocido como multiplicación, siempre se puede hacer: $3 \cdot 4 = 12, 23 \cdot 12 = 276$, etcétera.
Dados $m, n, o \in \mathbf{N}$ se satisfacen las siguientes dos propiedades:

(N3) $m \cdot n = n \cdot m$,

(N4) $(m \cdot n) \cdot o = m \cdot (n \cdot o)$.

Estas propiedades se conocen con el nombre de *propiedad conmutativa del producto* (N3) y *propiedad asociativa del producto* (N4).

De nuevo. Si escribes $2 \cdot (3 \cdot 5) = (2 \cdot 3) \cdot 5$ estás aseverando que el producto de 2 con $3 \cdot 5$ representa el mismo número que el producto de $2 \cdot 3$ con 5; ambas expresiones representan al número 30. Veamos ahora algunas ecuaciones sencillas.

Ecuaciones multiplicativas con números naturales.

Resolver una ecuación multiplicativa es resolver el siguiente problema:
Dados $a, b \in \mathbf{N}$ hallar $x \in \mathbf{N}$ tal que $a \cdot x = b$. Por ejemplo, considera las ecuaciones:

$$2 \cdot x = 6,$$

$$3 \cdot x = 5.$$

La primera de ellas tiene una única solución, $x = 3$, mientras que la segunda no la tiene. *¿A qué le llamamos solución de una ecuación multiplicativa?*

Definición.

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N} | a \cdot x = b\}$ es el conjunto de números naturales que satisfacen la ecuación $a \cdot x = b$. Por ejemplo,

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N} | 2 \cdot x = 6\} = \{3\}$,

El conjunto solución $\{x \in \mathbf{N} | 3 + x = 5\} =$.

Ejercicio 2.

Encontrar el conjunto solución de las ecuaciones que se dan a continuación:

1. $\{x \in \mathbf{N} | 2 \cdot x = 12\}$
2. $\{x \in \mathbf{N} | 3 \cdot x = 3\}$
3. $\{x \in \mathbf{N} | 4 \cdot x = 15\}$
4. $\{x \in \mathbf{N} | 13 \cdot x = 69\}$
5. $\{x \in \mathbf{N} | 22 \cdot x = 44\}$

Evidentemente, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución únicamente cuando b es un múltiplo de a, o dicho de otra manera, cuando a es un **divisor** de b.

Al igual que ocurre con la resta, la división de dos números naturales no siempre existe. Por ejemplo, puedes dividir 20 entre 5, pero no puedes dividir 20 entre 3 (en los números naturales). De manera que en el conjunto **N** solo podemos operar con sumas y productos. Para poder hacer restas fue necesario introducir los números negativos, que veremos a continuación y para hacer divisiones necesitamos a las fracciones, que veremos más adelante.

1.2. Los números enteros $\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Definición.

Los enteros incluyen a todos los números naturales, a sus negativos y al cero. Vamos a considerar de momento sólo dos operaciones aquí: la suma (+) y el producto (·). La resta y la división se pueden entender a partir de estas dos, como veremos más adelante.

Suma (+). La suma de dos enteros, es un entero. Para encontrarlo debes recordar las reglas para sumar números con signo. Aquí hay unos ejemplos.

- $(+4) + (+3) = +7$
- $(-7) + (-3) = -10$
- $(-13) + (8) = -5$
- $(7) + (-2) = 5$

Ahora bien, la suma satisface cuatro propiedades importantes: Dados $a, b, c \in \mathbf{Z}$,

1. (Z1) $a + b = b + a$,
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$,
3. $a + 0 = a$,
4. Todo entero a tiene un simétrico $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

Estas cuatro propiedades tienen que ver con la suma (+). Estudiaremos su importancia antes de comentar las propiedades acerca del producto: (Z1) se llama *propiedad conmutativa de la suma* y, evidentemente, nos dice que el orden en que se sumen dos números enteros es irrelevante: $3 + (-5)$ es lo mismo que $(-5) + 3$. (Z2) se llama *asociatividad* y nos dice que para sumar tres (o más números) podemos asociar como queramos: $1+2+3 = (1+2)+3 = 3+3$ o bien $1+2+3 = 1+(2+3) = 1+5$. Observa que de cualquier forma que asocies, el resultado es el número $6 \in \mathbf{Z}$. (Z3) habla de la existencia del cero, también llamado *elemento neutro de la suma*. La neutralidad se refiere a que no tiene ningún efecto: tu le puedes sumar cero a cualquier número entero a y el resultado será el mismo entero a. Finalmente (Z4) habla de los *simétricos*, también llamados inversos *aditivos*. Todo número entero que se te ocurra tiene un *inverso aditivo*: el inverso aditivo de 3 es -3, el de -10 es 10 y el de 0 es el mismo 0. Una cosa importante a recordar es que cuando tienes una variable $x \in \mathbf{Z}$ esta puede representar tanto un número positivo como uno negativo. Así, pues, x podría representar al número 6 pero también podría valer -15. Es incorrecto decir entonces que x es un número positivo solo porque no lleve escrito ningún signo antes. En general, si x representa un número entero, $-x$ representa a su simétrico.

Ejercicio 3.

Completa la siguiente tabla.

x		23			42		2024		6
-x	10		0	1		-17		-8	

La enorme ventaja de tener números negativos es que ahora se pueden resolver absolutamente todas las ecuaciones aditivas con números enteros: ecuaciones de la forma $a + x = b$, donde $a, b \in \mathbf{Z}$ son dos enteros conocidos de antemano. Y esto es gracias a que la resta está siempre definida en el conjunto de los enteros:

Resta (−). La diferencia de dos enteros es un entero:

Sabiendo que cada entero tiene un simétrico, nos es posible definir la resta de dos números enteros como sigue:

Dados $a, b \in \mathbf{Z}$, la *diferencia* de a y b es el número

$$a - b = a + (-b)$$

Esta definición dice que restar a menos b equivale a sumar a más el *simétrico* de b. Así, por ejemplo

- $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$
- $(-7) - 4 = (-7) + (-4) = -11$
- $4 - (-3) = 4 + 3 = 7$
- $7 - 10 = 7 + (-10) = -3$

Ejercicio 4.

Encontrar el conjunto solución de las ecuaciones aditivas que se dan a continuación:

1. $\{x \in \mathbf{Z} | 2 + x = 1\}$
2. $\{x \in \mathbf{Z} | 3 + x = 6\}$
3. $\{x \in \mathbf{Z} | 9 + x = 5\}$
4. $\{x \in \mathbf{Z} | 12 + x = 25\}$
5. $\{x \in \mathbf{Z} | 22 + x = -22\}$

Definición.

Producto $(\cdot)$. El producto de dos enteros es un entero. Para encontrarlo se toman en cuenta las leyes de los signos aprendidas en la escuela secundaria. Ejemplos:

- $7 \cdot 4 = 28$
- $(-5) \cdot 4 = -20$
- $3 \cdot (-10) = -30$
- $-3 \cdot (-5) = 15$

El producto satisface también cuatro propiedades importantes: Dados $a, b, c \in \mathbf{Z}$,

- (Z5) $a \cdot b = b \cdot a$,
- (Z6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (Z7) $a \cdot 1 = a$,
- (Z8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

En adelante omitiremos el puntito " $\cdot$ " y escribiremos ab en vez de $a \cdot b$ a menos que sea necesario. Claro que cuando aparecen números negativos se necesitan paréntesis. (Z5) es la propiedad conmutativa del producto, (Z6) es la asociativa del producto, (Z7) nos habla del *elemento neutro multiplicativo*: un número que multiplicado por cualquier entero a lo deja igual. Finalmente (Z8) es la *propiedad distributiva con la suma*. Puedes verificar esta propiedad multiplicando por ejemplo $12 \cdot 23 = (10 + 2)23 = 10 \cdot 23 + 2 \cdot 23 = 230 + 46 = 276$.

Aquí tenemos un inconveniente: a pesar de lo bonito que se comporta la multiplicación de dos enteros, aún le falta algo y es que no hay inversos multiplicativos. Es decir, no existe un número, por ejemplo, que multiplicado por 2 nos de la unidad, el 1. En otras palabras, el conjunto $\{x \in \mathbf{Z} | 2 \cdot x = 1\}$ es vacío: .

Ejercicio 5.

Encontrar el conjunto solución de las ecuaciones que se dan a continuación:

1. $\{x \in \mathbf{Z} | 2 \cdot x = 12\}$
2. $\{x \in \mathbf{Z} | 3 \cdot x = -3\}$
3. $\{x \in \mathbf{Z} | 4 \cdot x = 15\}$
4. $\{x \in \mathbf{Z} | -13 \cdot x = 169\}$
5. $\{x \in \mathbf{N} | -22 \cdot x = -44\}$

Cociente (/). Al dividir un entero entre otro entero diferente de cero, nos encontramos con el mismo problema que en los naturales, pues por ejemplo -20 no es divisible entre 3.

¿Por qué no se puede dividir entre cero?

Pues verás: la división, como hemos dicho, se define en términos del producto.

Dados $a, b \in \mathbf{Z}$, el cociente de a y b es un número que llamaremos c

$$a/b = c$$

tal que al multiplicar $c \cdot b = a$.
Así por ejemplo $20/4 = 5$ porque al multiplicar $5 \cdot 4 = 20$. Pero ¿y si tenemos $20/0$? Nos suelen decir simplemente: ¡no existe!, pero ¿por qué? Pues bien, suponiendo que $20/0$ existe, debería ser un número, digamos c, tal que al multiplicar $c \cdot 0 = 20$. En otras palabras, queremos hallar el conjunto $\{x \in \mathbf{Z} | 0 \cdot x = 20\}$, que como puedes ver ¡es vacío!

Aquí el número 20 jugó un papel de ejemplo cualquiera, en general para cualquier número entero $b \in \mathbf{Z}$, el conjunto $\{x \in \mathbf{Z} | 0 \cdot x = b\}$ es vacío, pues sabemos que $0 \cdot x = 0$ para toda $x \in \mathbf{Z}$. Podrías pensar que quizás si b vale cero, la ecuación sí tendría solución. En tal caso tendrías el conjunto $\{x \in \mathbf{Z} | 0 \cdot x = 0\}$, pero ¿cuál es el número que multiplicado por 0 nos da 0? ¡Podría ser cualquiera! Si haces $x = 4$, funciona. Si haces $x = 1000$ también funciona. De modo que ese conjunto es $\mathbf{Z}$. A pesar de esto, se ha convenido que la división $0/0$ no esté definida, pues de estarlo, su valor no sería único. En matemáticas se dice que no estaría bien definida. En conclusión: la división entre cero no está definida.

1.3. Los números racionales. $\mathbf{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq\}$

Este conjunto son las fracciones. A pesar de eso esta sección no es un repaso de fracciones. Más bien vamos a formalizar algunas ideas sobre ellas. Nota que $\mathbf{Q}$ incluye no sólo fracciones positivas, sino también negativas. Asií $\frac{3}{4}, 4, \frac{-7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{5}{12}, 1.75$.son números racionales: pues se pueden escribir como fracción. El 4 puede escribirse como $\frac{4}{1}$ y 1.75se escribe $\frac{175}{100}$.

¿Por qué no escribimos a $\mathbf{Q}$ en forma enumerativa como hicimos con $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$? La respuesta tiene que ver con el *orden*, que es una propiedad que estudiaremos en el siguiente capítulo. Es fácil decir qué número natural sigue *inmediatamente después* de 1, o cuál número entero está *justo antes* de -10. Para los racionales éstas preguntas requieren un análisis con detalle. Por ahora podemos decir que:

Definición.

Un número racional es aquel que se puede escribir como la razón de dos enteros a y b, siendo b diferente de cero.

Entonces los racionales se escriben como fracciones. Cualquier racional puede representarse ya sea como una fracción o bien como un número decimal cuya parte decimal es finita (termina en algún momento) o bien es infinita periódica, como en $0.3333..., 0.272727..., 17.984984984...$, etcétera.

Ejemplo 1.

- $\frac{1}{2} = 0.5$
- $\frac{-3}{4} = -0.75$
- $\frac{3}{10} = 0.3$
- $\frac{1}{3} = 0.333333.... = 0.3$

Recíprocamente, dado un número racional escrito como decimal, podemos escribirlo como fracción usando la idea siguiente: Supongamos que tenemos 0.75.

La primera cifra, 7, corresponde a los *décimos*. Por lo que vale $\frac{7}{10}$.

La segunda cifra, 5, corresponde a los *centésimos* y vale $\frac{5}{100}$

Entonces, 0.75 equivale a la suma $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$

¿Qué pasa cuando el número decimal es infinito periódico?

Veamos un ejemplo: 1.23232323...
Sea f = 1.232323...
Multiplicamos por 100: $100f = 123.232323...$
Restamos: $100f - f = 99f = 122$
Por lo que: $f = \frac{122}{99}$

Con un procedimiento similar podemos escribir a cualquier número f cuya expansión decimal es infinita periódica en forma de fracción. Llamamos a esto *expresión racional de f.* Debemos mencionar que la representación racional de un número **no es única**:

Dados dos enteros a y b con b diferente de 0, podemos escribir la fracción $\frac{a}{b}$, Por ejemplo 3 y 4 dan lugar a $\frac{3}{4}$, pero 6 y 8 dan lugar al mismo número, ya que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
Entonces una misma fracción se puede representar de muchas maneras. Otro ejemplo es el siguiente enunciado extraído de un comercial de comida para gato: “8 de cada 10 gatos prefieren Wishcats” es lo mismo que decir “16 de cada 20 gatos prefieren Wishcats” o bien “24 de cada 30 gatos prefieren Wishcats”. Aquí tenemos las fracciones:

$$\frac{8}{10} = \frac{16}{20} = \frac{24}{30}$$

Todas son *fracciones equivalentes.* Toda fracción se puede simplificar o amplificar para obtener una o varias fracciones equivalentes. De hecho, en el ejemplo anterior, la fracción más simple posible es $\frac{4}{5}$. ¿Cómo sabemos que ya no hay otra más simple? La respuesta es porque ya no hay divisores comunes de 4 y 5, por lo tanto la fracción es *irreducible.*

Definición.

Con los racionales podemos hacer las 4 operaciones:

Suma: $\frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4}\frac{4}{4} = \frac{7}{4}$, $\frac{4}{9} + (\frac{-1}{6}) = \frac{8}{16} - \frac{3}{18} = \frac{5}{18}$

En general: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Resta: $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{15}{24} - \frac{14}{24} = \frac{1}{24}$, $3 - \frac{5}{6} = \frac{18}{6} - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$

En general: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

Multiplicación: $(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{ab}{cd}$

División: $(\frac{a}{b}) \div (\frac{c}{d}) = \frac{ad}{bc}$

De modo que ¡en **Q** se pueden hacer las cuatro operaciones básicas de la Aritmética!

Esto significa, entre otras cosas, que todas las ecuaciones, aditivas y multiplicativas tendrán solución.

Ejercicio 6.

Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones. Indica si son aditivas o multiplicativas.

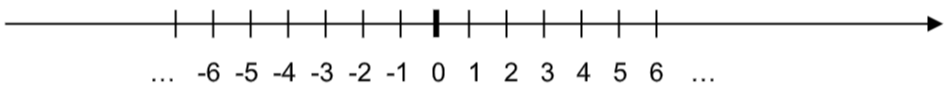
1. $x + 5 = 28$
2. $4x = 15$
3. $2x = 1$
4. $5x = 2$
5. $x + 20 = 3$

Los conjuntos que hemos visto guardan la siguiente relación: Los naturales están contenidos en los enteros, quienes a su vez están contenidos en los racionales. Simbólicamente:

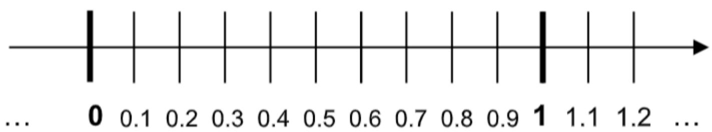
$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

Con los racionales, podemos hacer las operaciones básicas y nos sirven para representar mediciones, cantidades positivas y negativas, etc.

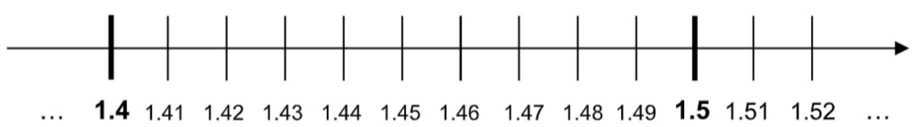
Quizás te sea conocido que es posible representar a los números racionales en una recta numérica. Usualmente dibujas una línea recta y marcas en ella un punto de referencia: el cero 0. A su derecha se van graduando la recta, esto significa que ubicamos los puntos 1, 2, 3, etcétera de manera que estén igualmente espaciados: la distancia de 0 a 1 es la misma que de 1 a 2, de 2 a 3, etcétera. A la izquierda hacemos lo mismo con los números negativos: -1, -2, -3, etcétera.



Esta representación tiene la ventaja de ser "flexible": podemos seleccionar un pedazo de la recta y hacer "zoom", como si miráramos con una lupa y lo sorprendente es que podemos hacer eso las veces que sean y siempre encontraremos números nuevos.

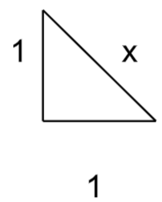


De aquí, podemos repetir el proceso una vez más y seleccionar, digamos, 1.4 y 1.5 para hacer un zoom y al dividir en diez pedazos iguales tendremos a los números:



Seleccionemos ahora 1.41 y 1.42 y localizar a los números 1.411, 1.412, ... , 1.419, 1.42. Observa como en cada paso estamos obteniendo subdivisiones cada vez más minúsculas.

Bueno, pero ¿todos los números son racionales?, ¿habrá algún número que no sea racional?, y si lo hay ¿qué representa en la vida real? Los griegos en la antigüedad, encontraron con gran asombro que, al tratar de hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, como en la figura, se obtiene un número que no es racional. ¿De qué número se trata? Veamos, consideremos el siguiente triángulo:



Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

por tanto

$$x = \sqrt{2}$$

que es un número que no es racional. Este número es nuestro primer ejemplo de *número irracional*. Este número tiene una infinidad de decimales y no existe un período que se repita infinitamente como en el caso de $1/3$, por ejemplo. De hecho $\sqrt{2}$ no se puede expresar como la razón de dos enteros. Para convencernos de este hecho vamos a hacer una demostración por *reducción al absurdo* o *por contradicción*: este es un tipo de argumentación que se basa en suponer cierta una aseveración que es falsa y tras una serie de razonamientos deductivos llegamos a una conclusión contradictoria. Veamos:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional y por lo tanto se puede escribir como la razón de dos enteros $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$ y donde no existen divisores comunes de a y b.
Tenemos entonces la siguiente cadena de razonamientos:

- $2 = \frac{a}{b}$, Hipótesis. Aquí a, b no tienen divisores en común.
- $2a = b$, Multiplicando ambos lados de la igualdad por b .
- $2b^2 = a^2$, Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad.
- a^2 es un número par, Se sigue del paso (3).
- a es un número par, Si el cuadrado de un número es par, el número es par
- $a = 2k, k \in \mathbf{Z}$, Se sigue del paso (5).
- $2b^2 = (2k)^2$, Sustituyendo (6) en (3).
- $2b^2 = 4k^2$, Desarrollando el cuadrado.
- $b^2 = 2k^2$, Dividiendo entre 2 ambos lados de la igualdad.
- b^2 es un número par, Se sigue del paso (9).
- b es número par, Si el cuadrado de un número es par, el número es par.
- a y b son pares. (5) y (11).

¡La última afirmación es una contradicción! ya que habíamos supuesto que a y b no tienen divisores en común. Hemos llegado así a un absurdo, por lo que concluimos que la hipótesis es falsa y así $\sqrt{2}$ no es racional. De manera análoga se puede demostrar que 3 no es racional, y en general, que p no es racional, donde p es cualquier número primo.

Los números racionales tienen la propiedad de ser un conjunto denso, lo que significa que dado cualquier número racional, no existe un número racional consecutivo inmediato. En otras palabras tenemos la siguiente:

Definición.

Dados dos números racionales $a, b \in \mathbf{Q}$, la media aritmética o promedio de a, b, es $\frac{a+b}{2}$

La media aritmética de dos números racionales es otro número racional. De esta manera aseguramos que siempre hay un número racional entre dos racionales dados: entre 0 y 1 existe $1/2$; entre 0 y $1/2$ existe $1/4$; entre $1/2$ y $1/4$ existe $3/8$ y así podemos tomar promedios de forma indefinida.

Ejercicio 7.

Encuentra un número racional entre cada par de números. Haz un dibujo en la recta numérica para cada inciso.

1. $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}$
2. $\frac{-1}{5}, \frac{9}{4}$
3. $0.8, \frac{1}{5}$
4. $1.24, 3$

1.4. Los números irracionales $\mathbf{Q}^c = \{x | x \neq \frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$

En palabras, los números irracionales son los que no son racionales. Es decir, no pueden escribirse como el cociente de dos enteros, cuyo denominador es diferente de cero.

Los griegos vieron que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como la razón de dos enteros.

$\sqrt{2} = 1.414213562...$ tiene una parte decimal infinita, ¡que no es periódica!

Tambien el número $\pi = 3.141592654...$, es irracional

El número $e = 2.71828182846...$, que veremos más adelante, también lo es.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e$ son números irracionales.
A diferencia de los números racionales, los irracionales se caracterizan porque su expansión decimal es infinita y no periódica.

1.5. Los números reales $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$

La unión de racionales con irracionales, forma el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, que será con el que trabajaremos en adelante.

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$$

De esta manera, el conjunto de los irracionales es el conjunto complemento de los racionales en un conjunto universal que consta de todos los números reales. Podemos representar esto por medio del siguiente diagrama: todos los números contenidos en el rectángulo son números reales ($\mathbf{R}$), dentro del rectángulo está el conjunto $\mathbf{Q}$, que contiene al conjunto $\mathbf{Z}$ y que a su vez contiene al conjunto $\mathbf{N}$.

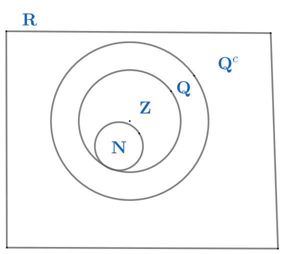


Figura 1: Diagrama de Venn de los números reales.

Aquí, todo lo que se encuentra dentro del rectángulo son números reales **R**, dentro de él está el conjunto **Q** dentro del óvalo más grande, y fuera de él está $\mathbf{Q}^c$ (los irracionales). El conjunto contiene a su vez a **Z** y éste a su vez a **N**.

1.6. Los números complejos.

Hasta aquí hemos estudiado al conjunto de números reales **R**. Hay otro conjunto numérico que es de suma importancia: el conjunto de los números complejos **C**, y con ellos también se pueden hacer las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética. Veamos cómo:

Definición.

Un número complejo es un par ordenado con componentes reales a, b y recíprocamente cada par ordenado de números reales es un número complejo.

Así, por ejemplo $(3,4), (-2,7), (1/2,0)$, son números complejos.

1.6.1. Suma de números complejos

Definición.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, tales que $z_1 = (a_1, b_1) y z_2 = (a_2, b_2)$. Entonces la suma de z_1, z_2 está dada como:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Ejemplo 2.

Suma los siguientes números complejos.
a) $z_1 = (5, -2), z_2 = (-4, 3)$
b) $z_1 = (-1/2, -7) z_2 = (3/4, 3)$

Solución. a) Aqui $a_1 = 5, b_1 = -2, a_2 = -4, b_2 = 3$. Usando la definición de suma se tiene que:

$$z_1 + z_2 = (5, -2) + (-4, 3) = (5 + (-4), -2 + 3) = (1, 1)$$

b) Ahora $a_1 = -1/2, b_1 = -7, a_2 = 3/4, b_2 = 3$

$$z_1 + z_2 = (-1/2, -7) + (3/4, 3) = (-1/2 + 3/4, -7 + 3) = (1/4, -4)$$

1.6.2. Multiplicación de números complejos.

Definición.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, tales que $z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2)$. Entonces el producto de z_1 con z_2 esta dado por

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_2) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Ejemplo 3.

Multiplicar los siguientes números complejos.
a) $z_1 = (1, 1), z_2 = (-3, 2)$
b) $z_1 = (-1/2, -3), z_2 = (-4, 1/4)$

Solución. Aquí tenemos que $a_1 = 1, b_1 = 1, a_2 = -3 y b_2 = 2$, de la definición se tiene que:

$$z_1 \cdot z_2 = (1, 1) \cdot (-3, 2) = ((1)(-3) - (1)(2), (1)(2) + (1)(-3)) = (-3 - 2, 2 + (-3)) = (-5, -1)$$

b) Ahora $a_1 = -1/2, b_1 = -3, a_2 = -4 y b_2 = 1/4$.

$$z_1 \cdot z - 2 = (-1/2, -3) \cdot (-4, 1/4) = ((-1/2)(-4) - (-3)(1/4), (-1/2)(1/4) + (-3)(-4)) = (2 + 3/4, -81 + 12) = (411, 895)$$

Ejercicio 8.

Resuelve las operaciones indicadas a continuación.

1. $(3,-1)+(1,5)$
2. $(-2,4)+(3,2)$
3. $(2,-3)+(-2,3)$
4. $(-3,4)+(1,-2)$
5. $(3,9/5)+(-7/2,-4/5)$
6. $(1,-4)+(3,-2)$
7. $(-2,4)+(-2,4)$
8. $(0,3)+(0,2)$

Ejercicio 9.

Resuelve las operaciones indicadas a continuación.

1. $(3,-1)(1,5)$
2. $(-2,4)(3,2)$
3. $(2,-3)(-2,3)$
4. $(-3,4)(1,-2)$
5. $(3,1/2)(1,-1/2)$
6. $(1,-4)(3,-2)$
7. $(-1,2)(-1,2)$
8. $(0,3)(0,2)$
9. $(x,y)(0,0)$
10. $(0,1)(0,1)$
11. $(0,1)^3$
12. $(0,1)^4$

1.7. Forma rectangular de los números complejos

Un número complejo (a,b) puede escribirse en la llamada forma rectangular:

$$(a,b)=a+bi$$

Utilizando esta notación, tenemos que:

$$i=(0,1)$$

elevando al cuadrado $i^2=(0,1)^2$
y como $(0,1)^2 2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$
por lo tanto $i^2=(-1,0)=-1$
entonces $i^2=-1$

$$i=\sqrt{-1}$$

El número i es conocido como la unidad imaginaria. La forma rectangular de los números complejos simplifica las operaciones con ellos, ya que se pueden operar como estamos acostumbrados simplemente usando el hecho de que $i^2=-1$.

Ejercicio 10.

Resuelve las operaciones indicadas a continuación.

1. $(2+3i)+(7–5i)$
2. $(5–4i)+(6–i)$
3. $(3+7i)+(-6–7i)$
4. $7–(2–4i)$
5. $5i–(7+2i)$
6. $(2–4i)–5i$
7. $(2+5i)–(4+3i)$
8. $(1–i)(1+2i)$
9. $2i(5–2i)$
10. $2i(3–i)^2$
11. $–5(-3–2i)$
12. $i(2–i)(3–4i)$
13. $\frac{5+2i}{3-i}$
14. $\frac{i}{2+3i}$
15. $\frac{5-2i}{i}$

1.7.1. Números complejos que son raíces cuadradas.

La ventaja de estudiar el conjunto de los números complejos es que se pueden encontrar las soluciones de ecuaciones en las que aparecen raíces cuadradas de números negativos, cosa que no es posible en los números reales. Supongamos por ejemplo que queremos resolver la siguiente ecuación:

$$x^2 = -1$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados, nos queda que:

$$x = \pm - 1$$

De donde se obtiene que: $x = -i, x = i, i = -1$

Cuando buscamos las raíces cuadradas de números negativos, sabemos que no las encontramos en los números reales, éstas están contenidas en el conjunto de los números complejos, y las encontramos usando el hecho de que $i = -1$.

Ejercicio 11.

Encuentra las soluciones de las ecuaciones dadas a continuación.

1. $x^2 = -36$
2. $x^2 + 49 = 0$
3. $x^2 + 9 = 0$
4. $(x - 3)^2 + 16 = 0$
5. $(x + 5)^2 + 4 = 0$

1.8. *Ejercicios y problemas*

1. 1.De los cuatro conjuntos $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^c$, a cuáles pertenece cada número dado.
   - *a*) 2.5
   - *b*) π
   - *c*) $\frac{1}{\sqrt{4}}$
   - *d*) $1 + \sqrt{2}$
   - *e*) $3(\sqrt{2})(5\sqrt{2})$
   - *f*) 0.375
2. Encuentra el valor de:
   - *a*) $2[3–2(4–8)]$
   - *b*) $5[-1(7 + 12–16) + 4]$
   - *c*) $\frac{6}{24} + \frac{1}{18}$
   - *d*) $\frac{7}{6} + \frac{3}{15}$
   - *e*) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$
3. Escribe en forma decimal:
   - *a*) $\frac{7}{8}$
   - *b*) $\frac{3}{20}$
   - *c*) $\frac{11}{3}$
   - *d*) $\frac{3}{7}$
   - *e*) $\frac{5}{13}$
   - *f*) $\frac{11}{7}$
4. Escribe en forma racional
   - *a*) 0.217171717...

b) 3.929292929...
c) 0.3999999...
d) 0.123123123

5. Representa en una recta numérica los pares de números que se dan y realiza entre ellos una subdivisión decimal (es decir en diez partes). En el primer inciso se dan dos números, luego en el siguiente se dan otros dos que debes localizar entre los números del inciso anterior, y así sucesivamente.

   a) $3.14, 3.15$
   b) $3.141, 3.142$
   c) 3.14153.1416
   Este proceso podría continuar indefinidamente y ¡nunca podremos localizar al número π

6. Encuentra un número irracional comprendido entre 3.14159 y π .

7. El número $\pi - \frac{22}{7}$, ¿es positivo, negativo o cero?

8. ¿Hay un número entre 0.999999... y 1? En caso afirmativo, cuál es, y si no, porqué.

9. Encuentra un número racional entre $\frac{17}{37}, \frac{52}{111}$

10. ¿Es 0.123456789011121314... racional o irracional?

11. Encuentra dos números irracionales cuya suma sea racional.

12. Realiza las siguientes operaciones con números complejos.

    a) $(4, 5) + (3, -7) =$
    b) $(-3, 4) + (5, -1)$
    c) $(6, 2/3) + (-1/2, -7/3)$
    d) $(1/2, -1/3)(-3/2, 7/3)$
    e) $(-2, 3) \cdot (-4, -5)$
    f) $(3, 8) \cdot (7, -2)$
    g) $(4, 3) \cdot (-6, -5)$

13. Escribe los siguientes números complejos en forma rectangular.

    a) $(7, -3)$
    b) $(2, -3)$
    c) $(1/3, -1/2)$
    d) $(-1/5, 3/5)$
    e) $(10, -3)$
    f) $(4, -1/2)$

14. Efectúa las operaciones con números complejos.

    a) $(5 - 3i) + (8 + i) =$
    b) $(7 - 3i) - (-1 + 2i)$
    c) $(-4 + 3i) + (2 + 2i)$
    d) $(1 + i)(3 - i) =$
    e) $((3 - 2i) - (2 - i))(3 - i) =$
    f) $\frac{1-i}{1+i}$
    g) $\frac{2+3i}{1+i} =$
    h) $\frac{3-2i}{i} =$
    i) $2i\frac{1-i}{1+i}$
    j) $\frac{26}{3+2i}$

15. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones.

    a) $x^2 + 9 = 0$
    b) $(5 - x)^2 + 81 = 0$
    c) $2 - 6x = i$