Cimientos Matemáticos

Módulo 15: Los números reales

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 15.*LOS NÚMEROS REALES*

La unión del conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionalesforma el conjunto de *números reales*, que es con el que trabajaremos mucho más en el resto del curso. Denotamos a este conjunto por $\mathbf{R}$ y forma lo que se llama un *campo*. Un campo es una estructura algebraica, un conjunto con dos operaciones: suma y producto, que satisfacen varias propiedades que enlistaremos a continuación.

1.1. Postulados de campo.

Un *postulado* es un enunciado que es cierto y que aceptamos sin demostración. Por otro lado, un *teorema* es una proposición que requiere una demostración lógica para concluir su veracidad. Los siguientes son postulados que cumplen todos los números reales. Con ellos demostraremos algunos teoremas y resolveremos ecuaciones y desigualdades.

Definición.

1. **Postulado 1. Cerradura** Sean $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $a + b \in \mathbf{R}$ y $a \cdot b \in \mathbf{R}$.
2. **Postulado 2. Conmutativo** Si $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
3. **Postulado 3. Asociativo** Si $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. **Postulado 4. Distributivo** Si $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
5. **Postulado 5. Identidad** Existe un elemento identidad para la suma, denotado por 0, tal que $a+0 = a$. y también existe un elemento identidad para el producto, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a$
6. **Postulado 6. inversos** En la suma. Para todo $a \in \mathbf{R}$, existe un elemento $-a$, llamado inverso aditivo (o simétrico), tal que sumado con a, nos da el elemento identidad: $a + (-a) = 0$

   En la multiplicación. Para todo $a \in \mathbf{R} a \neq 0$, existe un elemento $1/a$, llamado inverso multiplicativo (o recíproco), tal que multiplicado por a, nos da el elemento identidad: $(a)(1/a) = 1$

Un conjunto de números que satisface los postulados 1 al 6, forma lo que llamamos un *campo*. Así, el conjunto de los números reales es un campo. De hecho el conjunto de números racionales forma por sí mismo un campo y los números complejos también forman otro campo. Los enteros en cambio no forman un campo, ya que no todo número entero tiene un inverso multiplicativo.

1.2. Postulados de orden.

Veremos ahora que $\mathbf{R}$ es un campo *ordenado*, es decir, sus elementos guardan un orden entre sí, dado por una relación que se denota por el símbolo ”<”(menor que).

Definición.

Sea P, el conjunto de todos los números reales positivos.

Si $a, b \in \mathbf{R}$, decimos que *a es menor que b*, $a < b$, si y solo si $b - a \in \mathbf{R}$

Analogamente definimos que *a es mayor que b*, $a > b$, si y solo si $b - a \notin P$

Aprovecharemos este párrafo para comentar el significado de la frase ”si, y sólo si”. En la lógica matemática, la manera de hacer conclusiones es usando implicación. Una *implicación* es un enunciado de la forma: si P, entonces Q, donde P y Q son afirmaciones cuya veracidad es comprobable. Un ejemplo de la vida real sería: Si hoy llueve, entonces me mojaré. Un ejemplo dentro de las matemáticas es: Si n es un número par, entonces n tiene mitad. En la vida real puede ser más o menos difícil comprobar la veracidad de las afirmaciones. En matemáticas usamos un sistema de definiciones, postulados y teoremas para asegurarnos de que toda afirmación que entre en juego sea verificable. El *si y sólo si* lo utilizamos para denotar una *doble implicación*. Por ejemplo: Una figura plana es un cuadrilátero si, y solo si tiene cuatro lados. El enunciado anterior denota una doble condición: Si una figura plana tiene cuatro lados, entonces es un cuadrilátero. Recíprocamente si una figura plana es un cuadrilátero, entonces tiene cuatro lados. Otro ejemplo: n es un número par si y sólo si n tiene mitad. Si n es un número par, entonces tiene mitad; por otro lado, si n tiene mitad, entonces es un número par.

Pasemos entonces a enunciar los postulados de orden de los números reales.

Definición.

Postulado 7. Tricotomia Si $x, y \in \mathbf{R}$, entonces solo una de las proposiciones siguientes es verdadera: $x < y, x > y, x = y$

Postulado 8. Transitivo Si $x, y, z \in \mathbf{R}$. Si $x < y, y < z$ entonces $x < z$

Postulado 9. Aditivo. Sean $x, y, z \in \mathbf{R}$. Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$

Postulado 10. Multiplicativo. Sean $x, y, z \in \mathbf{R}$. Si $x < y, z > 0$, entonces $xz < yz$

Notación: El simbolo $\implies$ se lee .^{en}tonces.^{o} ïmplica que".

El simbolo $\iff$ se lee "si, y sólo siz denota una doble implicación.

Enunciemos nuestro primer teorema.

Teorema 1.

Si $a > b \iff -a < -b$

Demostración. Partimos de $a > b$, Dado por hipótesis
Sumamos $(-a) + (-b) \in \mathbf{R}$, esto por la cerradura
$a + ((-a) + (-b)) > b + ((-a) + (-b))$, Postulado aditivo
$(a + (-a)) + (-b) > (b + (-b)) + (-a)$, Asociativo y conmutativo
$0 + (-b) > 0 + (-a)$,De inversos aditivos.
$-b > -a$, Postulado 5
$-a < -b$, cumpliendose el teorema.
Veamos un ejemplo

$5 > 3 \implies -5 < -3$

Ejercicio 1.

Demostrar que si $-a < -b$, entonces $a > b$

Teorema 2.

Sean $x, y, z \in \mathbf{R}$, Si $x < y, z < 0$, entonces $xz > yz$

Demostración. $x < y$, Partiendo de nuesta hipotesis
$z < 0 \implies -z > 0$, Por el teorema 1.
$x(-z) < y(-z)$, Postulado multiplicativo, y se multiplica por $(-z)$
$-xz < -yz$, Resolviendo
$xz > yz$, Teorema 1.

Ejercicio 2.

Indica cuál de los cuatro postulados de orden se usó en cada proposición.

1. $x > 4 \implies x + (-1) > 4 + (-1)$
2. Si $a, b \in \mathbf{R}, a < b \implies 4a < 4b$
3. Si $m \in \mathbf{R}; m \neq 0, m < 0 \implies m > 0$
4. Si $a, b \in \mathbf{R}, a < b + 1 \implies a - 1 < b$
5. Sean $p, q, r \in \mathbf{R}; r > 0. p > q \implies pr > qr$
6. $m, n, p \in \mathbf{R}; m < n \implies m + p < n + p$
7. $v, s \in \mathbf{R}, v > 0. v < v + s \implies v^2 < v(v + s)$
8. Sean $a, b, c \in \mathbf{R}; a < b, b < c \implies a < c$

1.3. *Solución de desigualdades*

Los cuatro postulados de orden, junto con los teoremas anteriores nos permiten resolver desigualdades: hallar el conjunto solución de proposiciones donde intervienen desigualdades. El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales para los cuales es cierta la desigualdad.

Ejemplo 1.

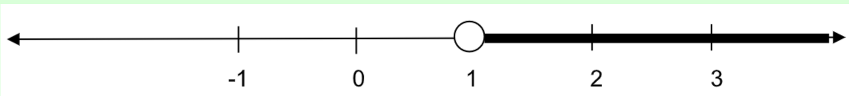
Hallar el conjunto solución de la desigualdad $2x + 1 > 3$.

Solución. Usando los postulados de orden tenemos que:
$2x + 1 > 3$. Hipotesis.
$2x + 1 + (-1) > 3 + (-1)$, Postulado aditivo: Se sumó -1 a ambos lados.
$2x > 2$, Resolviendo operacion
$1/2(2x) > 1/2(2)$, Postulado multiplicativo: Se multiplicó por $1/2$.
$x > 1$, Resolviendo operaciones.

El conjunto solución de la desigualdad puede escribirse así:

$$\{x \in \mathbf{R} | x > 1\}$$

Eso significa que la solución de la desigualdad $2x + 1 > 3$ no es un número, sino un *intervalo* de números: el intervalo que va del 1 hasta el infinito:



El "círculo hueco" en el 1 indica que el valor x = 1 no forma parte de la solución, sólo aquellos valores de x que son estrictamente mayores a 1: 1.01, 2, 5/4, 2 , etcétera.

Ejercicio 3.

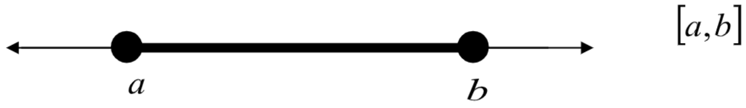
Encuentra el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $\frac{5x-6}{-7} < 2x + 3$
2. $2x - 1/3 < 3/2 + 3x$
3. $3x + 5 > 8$
4. $-2x + 3 < 1$
5. $2x + 4 > -10$
6. $2 - 3x > 4x - 5$
7. $3/5x - 2 > 2/5x + 7$
8. $8x > 6x + 14$

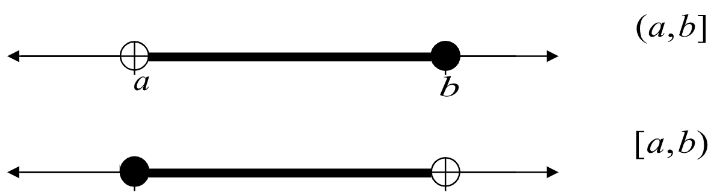
Intervalos. Vamos a representar y a llamar a los intervalos de números de la manera siguiente:

1. *Intervalos abiertos.* abierto. Son todas las x tales que $a < x < b$. Se denota (a, b).

2. **Intervalo cerrado** Son todas las x tales que $a \leq x \leq b$. Se denota [a, b].

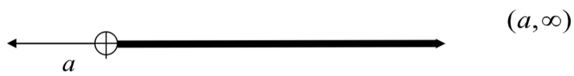


3. *Intervalo semiabierto.* Pueden ser todas las x tales que $a < x \leq b$. Se denota (a, b].También es semiabierto un intervalo de la forma $a \leq x < b$, denotado [a, b).

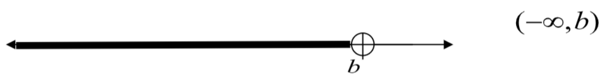


Los conjuntos anteriores tienen la propiedad de ser *acotados*: hay un número mayor y un número menor. Hay sin embargo casos de conjuntos donde esto no ocurre. Llamaremos a estos *intervalos no acotados* y son los siguientes:

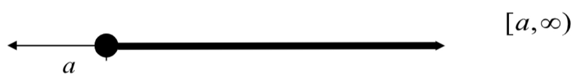
4. *Intervalo abierto no acotado:* Dado un número real a fijo, los números reales x tales que $a < x$ forman el intervalo denotado por (a, ∞)



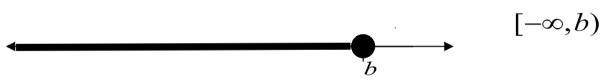
Dado un número real b fijo, el conjunto de números reales x tales que $x < b$ forma el intervalo $(-\infty, b)$



5. *Intervalo cerrado no acotado:* Dado un número real a fijo, los números reales x tales que $a \leq x$ forman el intervalo denotado por $[a, \infty)$.



Dado un número real b fijo, el conjunto de números reales x tales que $x \leq b$ forma el intervalo $(-\infty, b]$:



Ejemplo 2.

Hallar algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 11x < -24$.

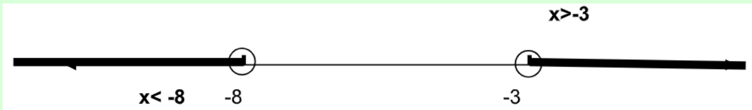
*Solución.*Escribamos la desigualdad en una forma más conveniente: $x^2 + 11x + 24 < 0$
Factorizando: $(x + 8)(x + 3) < 0$
Ahora bien, la expresión anterior dice que el producto de $x + 8$ por $x + 3$ debe ser negativo (menor que cero). Para que eso sea negativo se necesita que $(x+8)$ y $(x+3)$ tengan signos distintos. Entonces tenemos dos casos:

1.- $x + 8 > 0$ y $x + 3 < 0$ o 2.- $x + 8 < 0$ y $x + 3 > 0$

En el caso 1) se tiene que $x + 8 > 0$, o sea $x > -8$ y $x + 3 < 0$, o sea $x < -3$. En la recta numérica veamos que esto es:

Esto representa al conjunto: $\{x \in \mathbf{R}| - 8x < -3\}$.

En el caso ii) se tiene que $x + 8 < 0$, o sea $x < -8$ y $x + 3 < 0$, esto es $x < -3$.
Si lo analizamos en la recta real, vemos lo siguiente:



Como no hay números que cumplan $x < -8$ y $x > -3$ al mismo tiempo, este caso no aporta solución. La solución de la desigualdad son todas las x en $\mathbf{R}$ tales que $-8 < x < -3$. Usando la notación de intervalos, podemos escribir a la solución como $(-8, 3)$.

Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes desigualdades. Escribe la solución usando la notación para intervalos.

1. $x^2 - 1 \leq 0$
2. $2x^2 - x - 10 > 0$
3. $-x^2 - 4x + 3 < 0$
4. $5/2x > 3x^2 - 2$
5. $x^2 + 11x + 24 < 0$
6. $x^2 - 16x + 63 > 0$

1.4. *Valor absoluto*

En matemática, el concepto de valor absoluto es muy importante. Recordemos que el valor absoluto de un número es la distancia que hay entre dicho número y el cero.

Así, el valor absoluto de 4 es 4, y el valor absoluto de -7 es 7. *O* bien, simbólicamente: $4 = 4, 7 = -7$.
De éste modo, el valor absoluto de un número, es siempre positivo.

Definición.

El valor absoluto de un número real x es:

$$f(x) = \begin{cases} x, Si \geq 0 \\ \\ -x, Si\ x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 5.

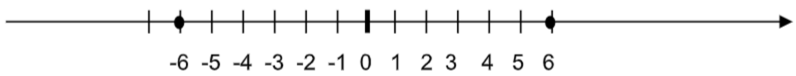
Efectúa las operaciones siguientes.

1. $|-7| \cdot |-2| - |-8| =$
2. $|-2| - |3-6| =$
3. $|8| + |5| =$
4. $|-4+3| - |6-2| =$
5. $|-5| - |-3| =$
6. $3 + |-2| =$
7. $3 + |5| - |-3| =$

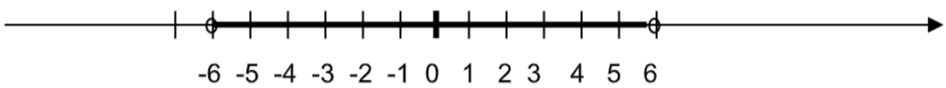
1.5. *Ecuaciones y desigualdades que involucran valor absoluto*

Analicemos los siguientes ejemplos:

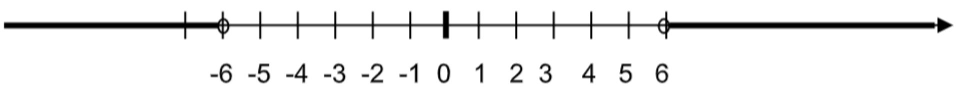
1. Resolver la ecuación $x = 6$.
   Aquí, x puede tener dos valores: $x = 6$ ó $x = -6$. Geométricamente significa que x es un número a 6 unidades del origen.

   Asi que $x = 6 \implies x = 6$ o $x = -6$
2. Resolver la desigualdad $x < 6$.
   En este caso x puede ser cualquier número cuya distancia al cero, sea menor a 6 unidades. Es decir $-6 < x < 6$

3. Resolver la desigualdad $x > 6$.
   Ahora x debe estar a mas de 6 unidades del origen, por lo que x puede estar a la derecha de 6, o bien a la izquierda de -6.

   así que $x > 6$ o $x < -6$. En notación de intervalos la solución es $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$

De los ejemplos anteriores, tenemos las siguientes propiedades:

Proposición.

Si a, c son números reales. $c > 0$

1. $a = c \Longleftrightarrow a = c$ o $a = -c$
2. $a < c \Longleftrightarrow -c < a < c$
3. $a > c \Longleftrightarrow a > c$ o $a < -c$

Ejercicio 6.

Encuentra el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y desigualdades. Haz un dibujo del conjunto solución.

1. $2x - 6 = 2$
2. $2x + 3 = 5$
3. $x + 3 < 4$
4. $5 - x > 3$
5. $x - 3 \leq 5$
6. $x - 2 > 4$
7. $2 - x \leq 2$
8. $5x + 1 \geq 6$
9. $3x - 2 > 1$

Ejercicio 7.

Resuelve las siguientes desigualdades. Haz un dibujo del conjunto solución.

1. $|x - 3| < 5$
2. $|2x + 1| \geq 5$
3. $\frac{-2x+1}{1/2x+2} < -1$
4. $|\frac{2x-1/2}{-x+2}| < 3$
5. $|\frac{x-2}{x+3}| < 3/2$
6. $|x + 2| < |x - 1|$

1.6. *Ejercicios y problemas*

1. Indica el postulado de orden que se está usando en cada implicación.
   a) $u + 2 > v$ y $v > 0 \implies (u + 2)v > v^2$
   b) Sean $p, q, r \in \mathbf{R}; p > q \implies p + r > q + r$
   c) $7a + b \geq 8 \implies 7a \geq 8 - b$
   d) Si $u, v, w \in \mathbf{R}, u < v$ y $a \not< b$, se puede concluir que $a < b$
2. Demostrar que si $a < b$ la media aritmetica (promedio) de a y b, esta comprendida entre ellos, osea $a < \frac{a+b}{2} < b$
3. Demostrar que el producto de dos números reales, ambos positivos, o ambos negativos es positivo.
4. Demostrar que si $a \in \mathbf{R} a \neq 0 \implies a^2 > 0$
5. Sean $a > 0, b > 0$, demostrar las afirmaciones siguientes:
   a) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$
   b) Si $a < b$, entonces $1/a > 1/b$
6. Sean $a \leq b$. ¿Cuáles expresiones son correctas?
   a) $a - 10 \leq b - 10$
   b) $-a \leq -b$

c) $a^2 \leq ab$

d) $a^3 \leq a^2 b$

7. Demostrar que $1.99999999.... = 2.00000$
8. Encuentra un número racional positivo y uno irracional positivo que sean ambos menores que 0.00001.

   Resolver las desigualdades siguientes y hacer un dibujo de su conjunto solución.
9. $\frac{x+1}{x} + \frac{x}{2} > 0$
10. $5x^2 - 3x - 2 \leq 0$
11. $x - 6 < 2x - 5 \leq x - 3$
12. $|x - 3| < 5$
13. $|2x + 1| \geq 5$
14. $\frac{6-2x}{3+x} > 2$
15. $\frac{2}{x-2} < \frac{x+2}{x-2} < 1$
16. $x^3 < x$
17. $|\frac{x+3}{x-3}| = 6$
18. $\frac{6-5x}{3+x} \leq 1/2$
19. $|3x + 4| \leq |4x + 5|$
20. $|\frac{x-3}{x+4}| < 5/2$
21. $\frac{6x}{4x-1} < 1/2$
22. $| - 2/3x + 4| \geq 5$
23. $3(x - 1)(x - 4) \geq 0$
24. ¿Es cierto que s $a < b$ entonces $a^2 < b^2$?
25. Determinar exactamente para qué elementos $a \in \mathbf{R}$ se tiene que $a^2 > a$
26. Encontrar a y b, racionales que $a < \sqrt{2} < b$ y $|a - b| < 1/1000$