Cimientos Matemáticos

Módulo 16: Funciones

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 61.*Funciones*

1.1. *Funciones en la vida real*

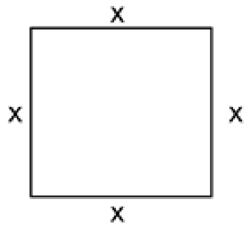
La idea de *función* aparece cuando una cantidad *depende* de otra. Por ejemplo, subir o bajar de peso *depende* de la cantidad de alimentos que coma. Podemos decir entonces que subir de peso está en *funcióm* de lo que comes.

Si una cantidad y depende de otra cantidad x , decimos que y es función de x , y escribimos:

$$y = f(x)$$

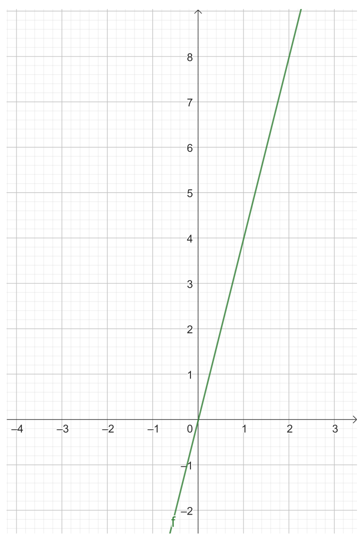
(léase: y igual a f de x).

Se suele decir que x es la variable independiente y que y es la variable dependiente. Para entender mejor qué significa que y depende de x , ilustremos con algunos ejemplos:
(1) El perímetro de un cuadrado depende de la longitud de su lado, mediante la expresión:

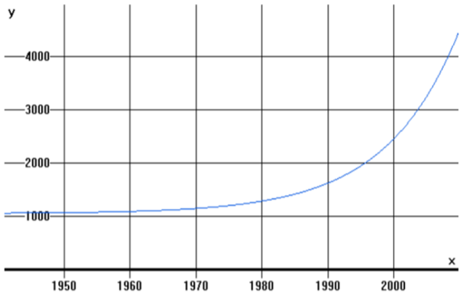


P representa el perímetro y x representa la longitud del lado. En este ejemplo P es función de x .
Si asignamos valores a x podremos encontrar los respectivos perímetros y dibujar una gráfica:

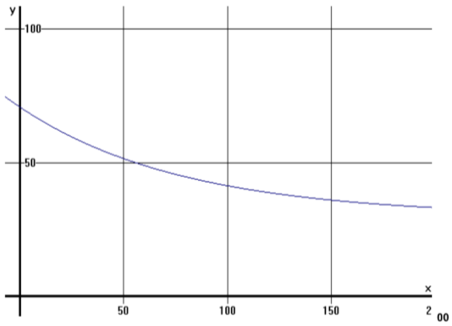
x	P
0	0
1	4
2	8
2.5	10
3	12
4	16
5	20



(2) Cómo varía la población humana del mundo, en función del tiempo. Llamémosle y al número de habitantes en el mundo en cierto momento y llamémosle x al tiempo medido en años. Aunque en este caso resulta difícil encontrar una expresión algebraica que nos represente de manera precisa cómo varía la población como función del tiempo, podemos hacer una gráfica investigando los registros de población mundial de cada año.



(3) Supongamos que un termómetro se sumerge en agua hirviendo (100°C aproximadamente) y luego se deja enfriar. Podemos registrar cómo baja la temperatura y como función del tiempo x y dibujar una gráfica:



(4) En el ejemplo del cuadrado, el área también está en función de su lado, y sabemos que:
El Área es función de la longitud del lado. A es función de $x : A = A(x)$

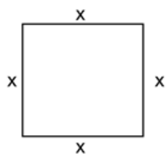
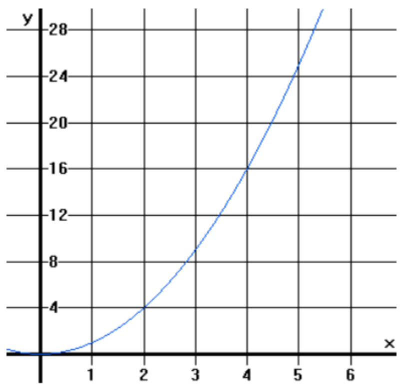


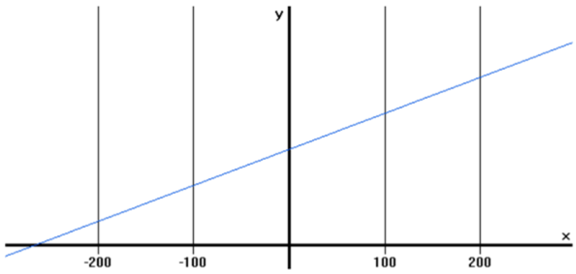
Figura 1: Caption

Nuevamente podemos hacer una tabla asignando valores diferentes a x y usarla para hacer una gráfica:



x	A
0	6
1	1
2	4
2.5	6.25
3	9
4	16
5	25

(5) En Física hay una ley que nos dice que si tenemos una nube de gas a cierta temperatura T, el volumen V está en función de dicha temperatura, es decir, que si variamos la temperatura del gas, su volumen variará en forma directamente proporcional con esta, o sea que al aumentar la temperatura, el volumen aumentará en la misma razón, y de la misma manera, al disminuir la temperatura el volumen disminuirá:



En este caso en el eje X se grafica la temperatura y en el eje vertical Y se grafica el volumen, pues se tiene que V = f(T) (volumen V es función de la temperatura T).

Los ejemplos anteriores son útiles pues nos ayudan a entender situaciones de la vida real en las que aparecen funciones que se pueden modelar con objetos matemáticos tales como tablas, gráficas y ecuaciones. No obstante, necesitamos tener una definición precisa que nos diga en términos matemáticos qué es una función.

Definición.

Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, de tal manera que a cada elemento del conjunto A, le corresponde uno y solo un elemento de B.
Podemos pensar que una función tiene tres partes:

1. Un conjunto A, llamado dominio.
2. Un conjunto B, llamado contradominio.
3. Una regla de correspondencia entre ellos.

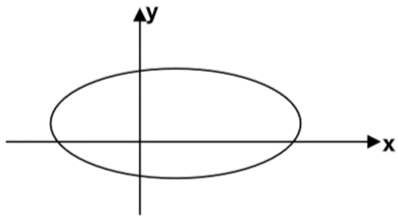
La regla de correspondencia, es una especie de "receta" que relaciona a cada elemento de A, con un elemento de B. Usualmente es una fórmula que nos dice cómo calcular el elemento b de B que le corresponde al elemento a de A.

1.2. *Gráficas de funciones y relaciones*

Veamos ahora cómo reconocer gráficas de funciones.

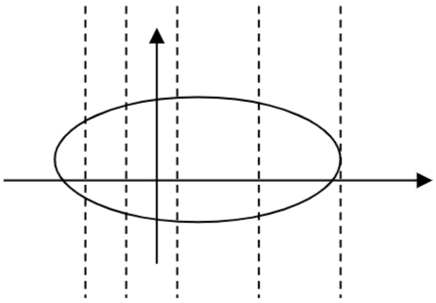
Cada función tiene una gráfica correspondiente, pero algo muy importante es que: no cualquier gráfica corresponde a una función. ¿Cómo es esto?

Al inicio del tema pusimos varios ejemplos con su gráfica, notemos como en cada uno, hay una característica común (la definición de función): a cada valor de x sólo puede corresponderle uno y solo un valor de y. Esto lo aclaro porque, hay gráficas como por ejemplo ésta:



Esta gráfica no es una función... y ¿por qué no?
Para esto hay un criterio: Imaginemos una línea recta vertical, e imaginemos también que esa línea la movemos a lo largo del eje X (de izquierda a derecha o viceversa). Si ésta línea imaginaria que hemos creado corta a lo más, en un punto a la gráfica, entonces no hay problema, se trata seguramente de una función.

Pero si la línea llegara a cortar en 2 o más puntos, entonces, no se trata de una función. Como en la gráfica de arriba. Si pasamos nuestra recta vertical a través de ella, observamos algo como esto:

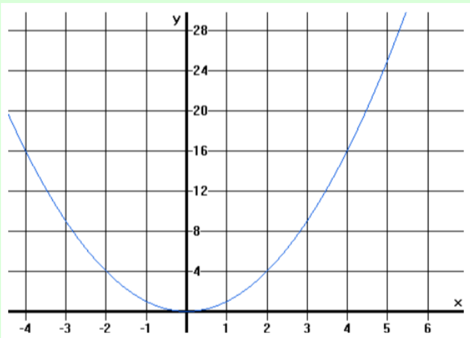


Como ves, en algunos casos (la última recta), se corta solo en un punto. Pero en otros, la recta corta en dos puntos, por ello la elipse, no es la gráfica de una función.

Ejemplo 1.

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^2$ Decir en si se trata de una función o no y porqué.
*Solución.*Si hacemos una tabla tenemos que:

x	y
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
2.5	6.25
3	9



Ejemplo 1cont.

Sí es una función porque cualquier línea vertical imaginaria intersecta a la parábola en un sólo punto. Por lo que podemos escribir $y = f(x) = x^2$

Esta es un ejemplo de función par, pues por ejemplo $f(2) = f(-2) = 4$. También $f(1) = f(-1) = 1$, etcétera. Ésta situación se ve con la simetría de la gráfica, es decir, ésta parábola es simétrica con respecto al eje X.

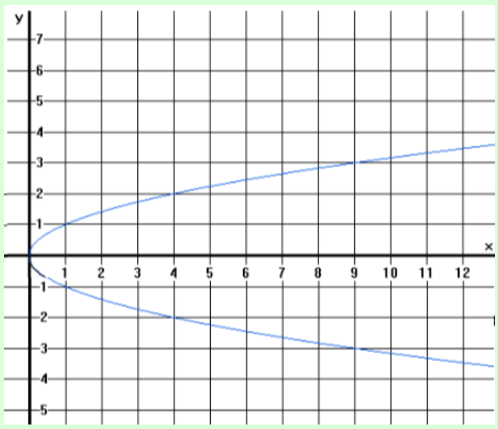
En general, una función es par, si para toda x en su dominio, se tiene que $f(x) = f(-x)$. Gráficamente debe haber simetría respecto al eje Y.

Ejemplo 2.

Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 = x$. Decir si la gráfica representa o no a una función. Indicar por qué.

Solución. Como $y^2 = x$, entonces quiere decir que $y = \pm x$, (¿porqué?).
El dominio de ésta relación son todos los números positivos $(x > 0)$, ya que no podemos dar a x un valor negativo.

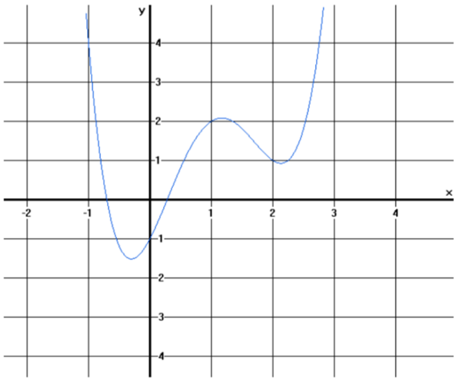
x	y
0	0
1	1,-1
2	1.4142... , -1.4142...
3	1.73... , -1.73...
4	2, -2
9	3, -3



Esta claramente NO ES FUNCION, pues a cada valor que le dimos a x, le corresponden dos valores de la y, pues por ejemplo hay dos números que elevados al cuadrado dan 2, uno es 1.4142... y el otro $-1.4142...$, esta ambigüedad se observa en la gráfica, al trazar las verticales y ver que cortan en dos puntos (excepto para x = 0)

1.3. *Ejercicios y problemas*

1. Dada la siguiente gráfica de una función,



a) Encuentra el valor de $f(-1)$

b) Estima el valor de f(2)

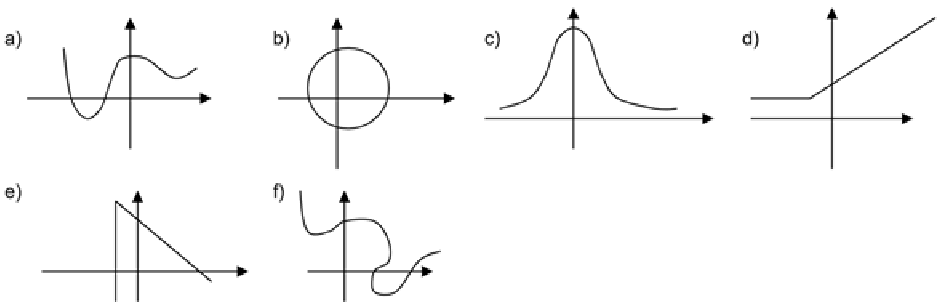
c) ¿Para cuáles valores de x se tiene que $f(x) = 2$?

d) Estima los valores de x tales que $f(x) = 0$

e) Determina el dominio.

f) ¿En qué intervalo f es creciente?

2. Determina si la curva representa o no una función. Explica.



3. Imagina que pones algunos cubos de hielo en un vaso, lo llenas con agua fría y lo dejas sobre la mesa. Describe cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. Traza una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t transcurrido.

4. Traza una gráfica aproximada de la temperatura exterior como función del tiempo en un día típico de primavera.

5. Mario corta el césped cada miércoles por la tarde. Traza una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo, durante un periodo de cuatro semanas.

6. El 14 de febrero de 2004 en Uruapan, Michoacán se tomó registro de la temperatura T medida en grados centígrados cada dos horas desde la media noche hasta medio día. El tiempo t se midió en horas a partir de la media noche.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	18	17	13	10	11	17	21

a) Usa los datos para trazar una gráfica aproximada de T como función de t.

b) Utiliza la gráfica para estimar la temperatura a las 11 A.M.

7. En la tabla, se muestra la población P (en miles) de un pequeño poblado, desde 2004 hasta 2014. (Se dan las estimaciones correspondientes a la mitad del año).

t	2004	2006	2008	2010	2012	2014
P	695	716	733	782	800	817

a) Dibuja una gráfica de P como función del tiempo t.

b) Usa la gráfica para estimar la población en 2011.

8. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentra $f(0), f(2), f(1/3), f(-x), f(x+1), f(a+h), f(2x)$