Cimientos Matemáticos

Módulo 17: Funciones algebraicas

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 17. *Funciones Algebraicas*

1.1. *La función lineal*

Una función se llama *función lineal* si está determinada por una ecuación cuyo dominio es el conjunto de números reales $\mathbf{R}$, su contradominio también es $\mathbf{R}$ y su regla de correspondencia se puede expresar mediante una ecuación de la forma :

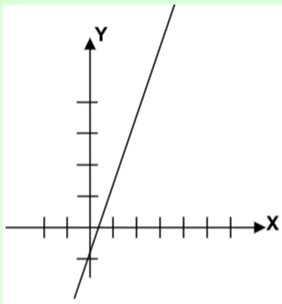
$$y = mx + b, \text{ donde } m \text{ y } b \text{ son costantes de } \mathbf{R}$$

Ejemplo 1.

Graficar la ecuación $2x – y = 1$.

Solución. Despejemos la variable y : $y = 2x–1$. De éste modo podemos construir una tabla donde asignemos valores a x y encontremos los correspondientes valores de y. Después graficaremos los puntos correspondientes como se muestra:

x	$y = 2x - 1$	y
-1	$y = 2(-1)–1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$y = 2(0) - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$y = 2(1) - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2(2) - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$y = 2(3) - 1 = 5$	$(3, 5)$
4	$y = 2(4) - 1 = 7$	$(4, 7)$



Al escribir una ecuación lineal en la forma $y = mx + b$, claramente la variable y queda despejada en términos de x, en otras palabras, y es una función de x.

Definición.

Una función lineal es una relación de la forma:

$$f(x) = mx + b, m, b \in \mathbf{R}$$

Tanto el dominio como el contradominio de ésta función es el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales.

Ejercicio 1.

Escribe las siguientes ecuaciones en forma de función lineal y traza su gráfica. Encuentra cuál es la pendiente en cada caso.

1. $y = 3x$
2. $y = 3x + 4$
3. $2x + 3y = 6$
4. $4x - y = 1$
5. $x + y = 10$
6. $2x - y = 2$
7. $x - y = 3$
8. $3x + y = 4$
9. $2x + 5y = 12$
10. $3x + 4y = -12$

1.2. *La función cuadrática*

Definición.

Una función cuadrática o de segundo grado es una relación de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

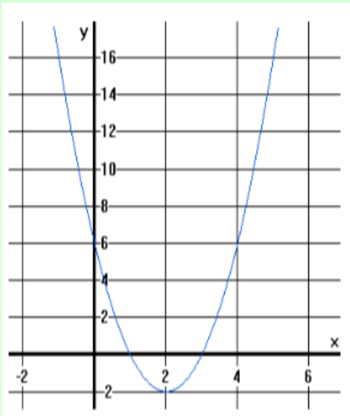
Donde a, b, c son constantes reales diferentes de 0.

Ejemplo 2.

Trazar la gráfica de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

*Solución.*Demos valores a x en $y = 2x^2 - 8x + 6$ para obtener algunos puntos y trazar una curva.

x	$f(x)$
-1	16
0	6
1	0
2	-2
3	0
4	6
5	16



1.2.1. *Propiedades Básicas de la Función Cuadrática*

Definición.

La gráfica de una *función cuadrática* se llama *parábola*, y sus ramas pueden extenderse hacia arriba o hacia abajo.

En general, en una función cuadrática $f(x) = ax + bx + c$, tenemos que:

1. Si el coeficiente de x^2 es positivo $(a > 0)$, la curva **se extiende hacia arriba** y su vértice es su **punto mínimo**.
2. Si el coeficiente de x^2 es negativo $(a < 0)$, la curva se **extiende hacia abajo** y su vértice es su **punto máximo**.

1.2.2. *Vértice de la parábola*

El vértice de la parábola puede ser el punto máximo, o el punto mínimo de la función.

Para determinar sus coordenadas, tendremos en cuenta que su abscisa es $x = \frac{-b}{2a}$, y una vez encontrada, obtenemos la ordenada sustituyendo el valor de x en la ecuación original.

Para demostrar este hecho es necesario tener conocimientos de cálculo diferencial, así que de momento lo usaremos sin demostración.

Ejemplo 3.

Encontrar las coordenadas del vértice de la parábola del ejemplo 2.

*Solución.*Para la función $y = 2x - 8x + 6$, tenemos que $a = 2, b = -8, c = 6$. Como a es positivo, la parábola se extiende hacia arriba, y su vértice es un punto mínimo, situación que se observa en la gráfica.

La abscisa del vertice $x = \frac{-b}{2a}$, en este caso es $x = \frac{-(-8)}{2(2)} = 2$.
La ordenada del vértice es $y = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = -2$. Entonces el vértice es $V(2, -2)$.

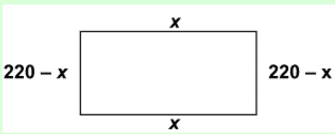
1.2.3. *Problemas de optimización*

En ciertas situaciones de la vida cotidiana, puede ser que se requiera optimizar alguna cantidad, ya sea de ingresos, de material o cualquier otra cantidad, es decir usar éstas de tal manera que se obtenga el máximo provecho posible. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.

¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de área máxima que puede ser cercado con 440 m de tela de alambre?

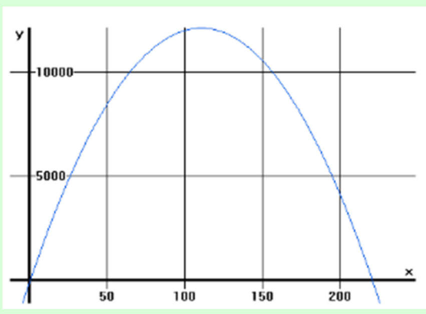
*Solución.*Llamemos x a la longitud de uno de sus lados. Como disponemos solamente de $440m$ de alambre, el perímetro debe ser 440m y por tanto el semi-perímetro (medio perímetro) debe ser de 220, de modo que si uno de los lados del terreno mide x, el otro deberá medir $220–x$.



El área A del rectángulo está dada por el producto de sus dimensiones (base por altura o largo por ancho), así que tendremos el área en función de x como: $A = x(220–x)$ ó bien

$$A = 220x–x^2$$

La ecuación anterior la identificamos fácilmente como una función cuadrática, con $a = -1$, $b = 220$ y $c = 0$, que representa una parábola cóncava hacia abajo (pues $a = -1$), así que su vértice será el punto máximo de la función. De modo que nuestro problema es equivalente al de encontrar el vértice de la parábola.
El vértice está en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-220}{2(-1)} = 110$
Interpretamos esto diciendo que A, alcanza su valor máximo para $x = 110$, por lo tanto la solución buscada a nuestro problema es que el largo debe medir 110 mts. y por tanto el ancho $220–110 = 110$ mts.



Ejercicio 2.

Encuentra el vértice de la parábola e indica si es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

1. $y = 3x^2 - 6x + 10$
2. $y = x^2 + 4x - 3$
3. $y = -2x^2 - 2x + 1$
4. $y = -5x^2 + 15x - 2$
5. $y = 6x^2 - 18x$
6. $y = 10x^2 - 20x$
7. $y = x^2 - 8x + 16$
8. $y = -x^2 + 8x + 2$
9. $y = -4x^2 + 4x - 2$
10. $y = -x^2 + 12x$

Ejercicio 3.

Traza la gráfica de cada una de las funciones siguientes. (Sugerencia: Usa papel milimétrico)

1. $y = x^2 + 4x - 5$
2. $y = -x^2 - 2x + 8$
3. $y = x^2 + 6x + 9$
4. $y = x^2 + 4$

Ejercicio 4.

Resuelve los problemas siguientes planteando una función cuadrática.

1. Encontrar dos números que sumen 20 y que su producto sea máximo.
2. Una persona desea cercar un terreno rectangular y dispone de 120 metros de alambre. ¿Qué dimensiones debe tener dicho terreno para que su área sea máxima?
3. La suma de dos números es 20, ¿cuáles son estos números para que la suma de sus cuadrados sea un mínimo?

1.2.4. *Raíces de la función cuadrática*

Una ecuación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática, y es función de x pues para cada valor real que adopte x le corresponde uno y solo un valor de y. Ahora, si buscamos qué valor de x hace que $f(x) = 0$ estaremos buscando las **raíces o ceros de la ecuación cuadrática**.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Veamos cómo hallar esas raíces, de varias maneras.

1. *Gráficamente.* Si graficamos la función $y = ax^2 + bx + c$, podremos observar en la gráfica cuáles son los valores de x para los que $y = 0$, ya que éstos son los puntos donde la curva interseca al eje x.

Ejemplo 5.

Hallar las raíces de la ecuación $2x^2 – 8x + 6 = 0$.

*Solución.*En el ejemplo anterior, tabulamos y graficamos la ecuación $y = 2x^2 – 8x + 6$. De la tabla o de la gráfica podemos ver que cuando $x = 1$ y $x = 3$, $y = 0$, así que las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

2. *Por factorización.* En algunos casos, podremos resolver ecuaciones cuadráticas factorizando la expresión $ax^2 + bx + c$, como se vio en nuestro curso de Aritmética y Álgebra.

Ejemplo 6.

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 6 = 5x$.

*Solución.*Si escribimos la ecuación en la forma general obtenemos:
$x^2 - 5x + 6 = 0$. Ecuación dada. $\Longrightarrow$ $(x–2)(x–3) = 0$ Factorizando

Para que el producto $(x–2)(x–3)$ sea cero, al menos uno de los dos factores debe ser cero, así que las soluciones son:

$$x = 2, x = 3$$

Ejemplo 7.

Resolver la ecuación $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

*Solución.*En éste caso hay que factorizar agrupando:
$3x^2–5x + 2 = 0$. Ecuación dada
$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 0$ escribimos $-5x$ como $-3x–2x$
$(3x^2 - 3x)–(2x–2) = 0$ Agrupamos
$3x(x–1)–2(x–1) = 0$ Sacando factor común
$(x–1)(3x–2) = 0$ Factorizamos $(x - 1)$

Por tanto las soluciones son los valores que hacen cero cada factor: $x = 1, x = 2/3$

3.*Por Fórmula General.* Resolver una ecuación usando factorización es un procedimiento que nos da fácilmente la solución, pero desafortunadamente no todas las ecuaciones de segundo grado pueden factorizarse fácilmente, como hemos visto.

Necesitamos entonces de un método que nos permita hallar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a diferente de cero.
Deduciremos entonces una fórmula que resolverá de manera general una ecuación de este tipo.

$a^2 + bx + c = 0$ Ecuación general de segundo grado.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dividimos entre a ambos miembros.
$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$. Sumando $-c/a$ a ambos miembros.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$. Sumando $b^2/4a^2$ para completar un T.C.P.
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Factorizamos el T.C.P. del primer miembro y realizamos la suma de fracciones en el segundo.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Extraemos raíz cuadrada de ambos miembros.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$. Sumamos $-b/2a$ en ambos lados y simplificamos.
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. FÓRMULA PARA RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

La expresión anterior se conoce como fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, y ésta nos da las dos raíces de cualquier ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 8.

Encontrar las soluciones de la ecuación $8x^2 - 10x + 2 = 0$ usando la fórmula general.

Solución. En ésta ecuación tenemos que los coeficientes son $a = 8, b = -10$ y $c = 2$. Sustituyendo directamente en la fórmula general tenemos que:

$x = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(8)(2)}}{2(8)} = \frac{10\pm\sqrt{100-64}}{16} = \frac{10\pm\sqrt{36}}{16} = \frac{10\pm 6}{16}$, , así que:

$x_1 = \frac{10+6}{16} = 1, x_2 = \frac{10-6}{16} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto las soluciones son $x = 1, x = 1/4$.

Ejercicio 5.

Resolver y comprobar las siguientes ecuaciones.

1. $2x^2 - 50 = 0$
2. $-27 = -3x^2$
3. $2x^2 - 4x = 0$
4. $5x = -x^2$
5. $x^2 + 18x + 81 = 0$
6. $x^2 - x = 6$
7. $x^2 - 100 = 0$
8. $x^2 - 5x = 0$
9. $x^2 + 6x – 7 = 0$
10. $3y^2 = 6y$

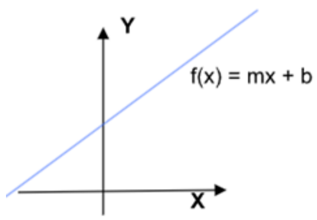
Ejercicio 6.

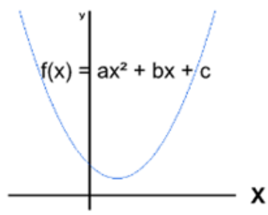
Resuelve los siguientes problemas, planteando una ecuación cuadrática.

1. El producto de dos números enteros positivos consecutivos es 182, ¿cuáles son esos números?
2. Se desea cercar con malla un terreno rectangular que tiene $480m^2$ de superficie, si sabemos que el largo tiene 2m más que el doble del ancho, ¿cuántos metros de malla se necesitan?
3. En una cancha de tenis el largo es el doble del ancho; si la cancha tiene una superficie de $98m^2$ ¿cuáles son sus dimensiones?
4. La altura de un triángulo es 2 centímetros mayor que la base. Si el área es de 40 centímetros cuadrados, ¿cuáles son las medidas del triángulo?

1.3. *Función Polinomial*

Este capítulo está enfocado al estudio de algunas funciones algebraicas. Conocemos ya la función lineal o de primer grado $f(x) = mx + b$, cuya gráfica es una línea recta y la función cuadrática o de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, que representa una parábola.





¿Qué pasará con las funciones de tercero o de cuarto grado? Veamos algunas gráficas de funciones de grado n, donde n puede ser cualquier número natural (1, 2, 3, etcétera).

Definición.

Una función polinomial es una relación de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n_2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

Donde n es un número natural, y se le llama grado del polinomio. Los coeficientes a_n, a_{n-1}, a_{n-2}... son números reales o complejos.

Notemos que los exponentes de la x en cada término van en forma decreciente $(n, n–1, n–2, ...)$
Asi, $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6, g(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - x$, son funciones polinomiales.

En la primera, el grado del polinomio es $n = 3$, y la segunda es un polinomio de grado 5. Siempre escribimos los polinomios en forma decreciente, es decir, las potencias se escriben de la mayor a la menor. En algunas ocasiones el polinomio está completo, como es el caso de $f(x)$ en el ejemplo anterior, otras falta algún o algunos, como en $g(x)$

por ejemplo, no tenemos término de cuarto grado $4x$, como tampoco tenemos término constante. En este caso puede escribirse el polinomio como:

$$g(x) = x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 0$$

y así figurarán todos los términos de grado 5, 4, 3, 2, 1 y 0.

1.3.1. *Operaciones con funciones polinomiales*

Trabajando con funciones polinomiales, podemos generar nuevas funciones a partir de otras mediante algunas operaciones algebraicas que definiremos en seguida.

Suma de Funciones Polinomiales. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, podemos hallar la suma f(x) + g(x), sumando los términos que tengan el mismo grado, es decir, reduciendo los términos semejantes.

Ejemplo 9.

Sean $f(x) = 3x^2–8x + 3$, y $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x–2$. Hallar la suma $f(x) + g(x)$.

Solución. $f(x)+g(x) = (3x^2–8x+3)+(x^3+3x^2-4x–2) = 3x^2–8x+3+x^3+3x^2-4x–2 = x^3+6x^2-12x+1$

Resta de Funciones Polinomiales. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones polinomiales, la resta $f(x)–g(x)$ se encuentra de manera similar a la suma de funciones, solo que en éste caso, recordemos cambiar el signo de todos los términos del polinomio precedido del signo menos.

Ejemplo 10.

Si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 6$, y $g(x) = -x^3 + x^2 - 3$. Hallar $f(x)–g(x)$.

Solución. $f(x)–g(x) = (2x^3 + 3x^2 - 8x + 6)–(-x^3 + x^2 - 3)$. Restamos $f(x)–g(x)$
$= 2x^3 + 3x^2 - 8x + 6 + x^3 - x^2 + 3$. Quitamos paréntesis. $= 3x^3 + 2x^2 - 8x + 9$. Reducimos términos.

Multiplicación de Funciones polinomiales. La multiplicación de dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$ la haremos como vimos en multiplicación de polinomio por polinomio.

Ejemplo 11.

Si $f(x) = 3x^2 - 4x$ y $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x–1$ encontrar el producto $f(x) \cdot g(x)$.

Solución. $f(x) \cdot g(x) = (3x^2 - 4x) \cdot (x^3 + 3x^2 - 2x–1) == 3x^5 + 9x4 - 6x^3 - 3x^2 - 4x4 - 12x^3 + 8x^2 + 4x =$
$3x^5 + 5x^4 - 18x^3 + 5x^2 + 4x$

División de Funciones Polinomiales. El algoritmo de la División tiene por objetivo al dividir un polinomio f(x) (dividendo) entre otro polinomio g(x) (divisor), obtener un cociente Q(x) y un residuo r(x), tales que:

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

A la expresión anterior se le conoce como *Algoritmo de la División*, y se verifica para cualesquiera $f(x)$ y $g(x) \neq 0$.

Recordemos el procedimiento para dividir un polinomio entre otro polinomio.

Ejemplo 12.

Hallar el cociente y el residuo cuando el polinomio $2x^4–9x^3–14x^2 + 6x + 6$ se divide entre el polinomio $-x^2–3x + 2$.

Solución. En éste caso el polinomio dividendo $2x^4–9x^3–14x^2 + 6x + 6$ se dividirá por el divisor $-x^2–3x + 2$. Recordando el procedimiento de la división de polinomio entre polinomio:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & -2x^2 & +15x & -35 \\ \hline
-x^2-3x+2 & 2x^4 & -9x^3 & -14x^2 & +6x & +6 \\
 & -2x^4 & -6x^3 & +4x^2 & & \\ \hline
 & & -15x^3 & -10x^2 & +6x & \\
 & & 15x^3 & +45x^2 & -30x & \\ \hline
 & & & 35x^2 & -24x & +6 \\
 & & & -35x^2 & -105x & +70 \\ \hline
 & & & & -129x & +76
\end{array}
$$

El cociente es entonces $-2x^2 + 15x–35$ y el residuo $-129x + 76$.

Sabemos que ésta última expresión es residuo puesto que es un polinomio de grado menor que el divisor, por lo que ya no puede seguirse dividiendo. Podemos comprobar que la división está bien efectuada, con el algoritmo de la división: al multiplicar el cociente $-2x^2 + 15x–35$ por el divisor $-x^2–3x + 2$, y sumando el residuo $-129x+76$, debe obtenerse el polinomio dividendo $2x^4–9x^3–14x^2+6x+6$. Esto se deja como ejercicio al alumno.

División Sintética. Cuando se divide un polinomio $f(x)$ de grado mayor o igual que dos, entre un binomio de la forma $g(x) = x–c$, puede usarse un procedimiento mucho más sencillo y práctico que la división larga que hicimos anteriormente. Éste proceso se llama división sintética, y es sencillo porque trabaja únicamente con los coeficientes del polinomio $f(x)$. Ilustraremos con el siguiente:

Ejemplo 13.

Divídase el polinomio $f(x) = x^3–3x^2–4x + 12$ entre el polinomio $g(x) = x–2$.

Solución: Disponemos los coeficientes de $f(x)$ como sigue.

$$
\begin{array}{rrrr}
1 & -3 & -4 & 12 \\
 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

Necesitamos colocar como prefijo al valor de x que haga cero el divisor, es decir, que cumpla $x–2 = 0$. Éste valor es 2.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\underline{2} & 1 & -3 & -4 & 12 \\
 & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

En seguida bajaremos el primer coeficiente, tal como aparece, es decir bajamos el 1. Éste número 1, se multiplicará por el prefijo: $(1)(2) = 2$, y el resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente, o sea del -3, y se suman: $-3 + 2 = -1$. Éste -1 se coloca debajo de la línea horizontal.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\underline{2} & 1 & -3 & -4 & 12 \\
 & \downarrow & 2 & & \\ \hline
 & 1 & -1 & &
\end{array}
$$

Continuamos con éste procedimiento, multiplicando el -1 por el prefijo 2 y anotando el resultado debajo del siguiente coeficiente, que es el -4, y sumamos. Repetimos esto hasta obtener lo siguiente:

Ejemplo 13cont.

2	1	-3	-4	12
		2	-2	-12
	1	-1	-6	0

Los números obtenidos se interpretan de la siguiente manera: El último número, (0) es el residuo. Los demás, de derecha a izquierda, son los coeficientes del cociente, en forma creciente, es decir, el -6 es el término constante, el -1 es el coeficiente del término en x; mientras que el 1 es el coeficiente del término en x^2. Así el cociente es:
$Q(x) = x^2 - x–6$, Y el residuo $r(x) = 0$.

Como el residuo es igual a cero, en éste caso se dice que $g(x) = x–2$ es un factor de $f(x)$.

Éste cociente y residuo, serían los mismos que hubiéramos obtenido realizando el procedimiento de la división larga. Podemos comprobar también que $Q(x)$ y $r(x)$ cumplen con el algoritmo de la división:

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$x^3–3x^2–4x + 12 = (x^2 - x–6)(x–2) + 0 = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x–6x + 12 = x^3–3x^2–4x + 12$

1.3.2. Teoremas sobre Funciones Polinomiales.

Veremos ahora cómo construir la gráfica de una función polinomial. Ya sabemos que el caso de la función lineal, y el de la función cuadrática, son casos particulares de funciones polinomiales de grado 1 y 2 respectivamente, y sus gráficas son una línea recta y una parábola. Aquí nos daremos una idea del tipo de curva que obtendremos al graficar una función de grado 3, 4 etc.

Antes enunciaremos algunos teoremas que, además de su central importancia en Álgebra, nos serán útiles para analizar las propiedades de las funciones y sus gráficas.

Teorema del residuo.

Si una función polinomial $f(x)$ se divide por un binomio de la forma $g(x) = x - c$, donde $c \in \mathbf{R}$, entonces el residuo obtenido es $f(c)$

Demostración. Valiéndonos del algoritmo de la división, sabemos que: $f(x) = Q(x) \cdot g(x) + r(x) \implies f(x) = Q(x) \cdot (x - c) + r(x)$

Y Si hacemos $x = c$, tendremos:
$f(c) = Q(c) \cdot (c - c) + r(x) \implies (c) = Q(c) \cdot 0 + r(x) \implies f(c) = r(x)$

Que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 14.

Verifíquese que se cumple el teorema del residuo cuando el polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2–x–2$ se divide por $x + 3$.
Solución. Hagamos la división sintética. En éste caso, el prefijo es -3.

-3	1	2	-1	-2
		-3	3	-6
	1	-1	2	-8

El cociente es $x^2 - x + 2$, y el residuo es $r(x) = -8$.
$x + 3 = x–(-3)$, así que $c = -3$. Si evaluamos $f(x)$ en $x = -3$, obtenemos:
$f(c) = f(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - (-3)–2 = -27 + 18 + 3–2 = -8$.
que es el mismo valor del residuo obtenido por división sintética, de modo que el teorema sí se verifica.

Ejemplo 14cont.

Antes de ver el siguiente teorema, debemos recordar lo que es un factor. Si a y b son números naturales, decimos que a es factor de b si a divide exactamente a b, es decir, al efectuar la división a/b, el residuo es cero. Así, decimos que 8 es factor de 24, o que 12 es factor de 84, pero 7 no es factor de 22 pues al dividir 22/7, el residuo sería 1.

En el caso de dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se tiene que $g(x)$ es factor del polinomio $f(x)$ si al efectuar la división $f(x)/g(x)$, el residuo es igual a cero. (Véase el ejemplo 13 de éste módulo).

Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene por factor a $g(x) = x - c$ si y solo si $f(c) = 0$.

*Demostración.*Debemos probar dos cosas: (i) Si $g(x) = x–c$ es factor, entonces $f(c) = 0$, y (ii) Si $f(c) = 0$ entonces $g(x) = x–c$ es un factor del polinomio.

(i) Si $g(x) = x–c$ es un factor del polinomio f(x), entonces, por el algoritmo de la división, se tiene que:
$f(x) = Q(x) \cdot (x–c) + r(x)$, pero $r(x) = 0$ por ser $x–c$ factor de $f(x)$, así que: $f(x) = Q(x) \cdot (x–c)$.
al ser $r(x) = 0$, por el Teorema del Residuo, tenemos que $r(x) = f(c) = 0$, que es lo que queríamos probar.

(ii) Si $f(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo, se tiene que el residuo de la división $f(x)/g(x)$ es:
$r(x) = f(c) = 0$, y por el algoritmo de la División, se tiene $f(x) = Q(x) \cdot (x–c) + 0$, o sea $f(x) = Q(x) \cdot (x–c)$
, es decir, $x–c$ es factor de $f(x)$.
Con esto queda demostrado el Teorema.

Ejemplo 15.

*Solución 2.*Usando el Teorema del residuo, podemos evaluar la función $f(x)$ en $x = 2, 3, -3, 2$; y ver en dónde se obtiene $f(x) = 0$.

- $f(2) = 2(2)^3–(2)^2–25(2)–12 = 16–4–50–12 = -50$
- $f(3) = 2(3)^3–(3)^2–25(3)–12 = 54–9–75–12 = -42$
- $f(-3) = 2(-3)^3–(-3)^2–25(-3)–12 = -54–9 + 75–12 = 0$
- $f(-2) = 2(-2)^3–(-2)^2–25(-2)–12 = -16–4 + 50–12 = 18$

Como $f(-3) = 0$, concluimos que $x + 3$ es un factor de $f(x)$.

No olvidemos que los Teoremas del Residuo y del factor son para el caso de binomios de la forma $x–c$. En el caso de que se tuviera una expresión que no fuera de la forma $x–c$, para determinar si es factor o no de un polinomio $f(x)$, se tendrá que efectuar la división larga para obtener el residuo.

Ejemplo 15cont.

Determínese si cual de los siguientes es un factor de $f(x) = 2x^3 - x^2 - 25x - 12$
1) x – 2, 2) x – 3, 3) x + 3, 4) x + 2

*Solución 1.*Por división sintética dividimos f(x) entre cada uno de los binomios.:

2 |	2	-1	-25	-12
		4	6	-38
	2	3	-19	**-50**

-

Ejemplo 15cont.

3 |	2	-1	-25	-12
		6	15	-30
	2	5	-10	**-42**

-3 |	2	-1	-25	-12
		-6	21	12
	2	-7	-4	**0**

-2 |	2	-1	-25	-12
		-4	10	30
	2	-5	-15	**18**

Vemos que al dividir entre el binomio $x + 3$, se obtiene residuo cero, por tanto $x + 3$ es factor de $f(x)$.

1.3.3. Gráfica de funciones polinomiales.

Veremos ahora cómo construir la gráfica de una función polinomial. Hasta ahora hemos graficado funciones de primero y de segundo grado, y hemos visto que esto no es tan complicado, pues basta dar algunos valores para x, y obtener algunos puntos (x, y) por los que pasará la gráfica. Éste procedimiento lo podemos aplicar también al graficar polinomios, pero cuando tenemos polinomios de grado 3, 4, etc., se vuelve tedioso hacer los cálculos para evaluar la función. Podemos sin embargo usar un procedimiento alternativo, usando la división sintética y aprovechando el Teorema del Residuo para obtener una serie de puntos.

Por ejemplo, si deseáramos graficar la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x – 3$, para encontrar $f(2)$, no es necesario evaluar la función en x = 2. Podemos usar la división sintética entre $x – 2$, y sabemos que el residuo tendrá que ser $f(2)$.

2 |	2	1	-1	-3
		4	10	18
	2	5	9	**15**

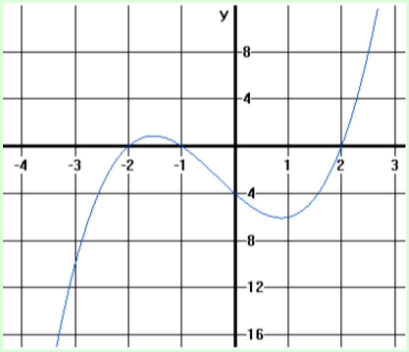
Como el residuo es 15, podemos afirmar que $f(2) = 15$, es decir, el punto $(2, 15)$ será un punto de la gráfica.

Ejemplo 16.

Constrúyase la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2–4x–4$.

*Solución.*Usando la división sintética podemos construir la siguiente tabla de valores y graficar usando los puntos obtenidos.

x	f(x)
-4	-36
-3	-10
-2	0
-1	0
0	-4
1	-6
2	0
3	20



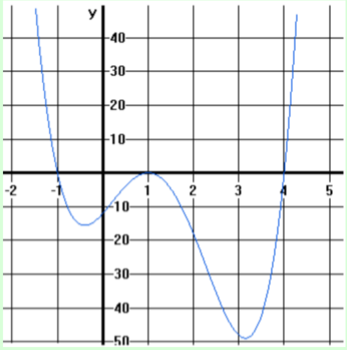
Ejemplo 17.

Graficar la función $f(x) = 3x^4–15x^3 + 9x^2 + 15x–12$.

*Solución.*Asignando valores a x y calculando los de y, construimos la siguiente tabla:

x	$f(x)$
-2	-126
-1	0
0	-12
1	0
2	-18
3	-48
4	0
5	288

Ejemplo 17cont.



Veamos cómo es posible localizar, aunque sea en forma aproximada, las raíces del polinomio, al observar la gráfica. En éste ejemplo es fácil ver que -1, 1 y 4 son raíces o ceros del polinomio.

A continuación trataremos el tema de las raíces de una función polinomial.

1.3.4. Raíces racionales de la función polinomial.

Ya hemos dicho que una raíz de una función es aquel valor x para el cual $f(x) = 0$. De este modo no es difícil notar que una función lineal (de primer grado) tiene solo una raíz, y que una función cuadrática (de segundo grado) tiene dos raíces, que pueden ser repetidas o no. Enunciaremos sin demostrar, un Teorema de central importancia en el Álgebra con el cual veremos qué ocurre, en general, en una función polinomial de grado n.

Teorema fundamental del Algebra.

Toda función polinomial de grado n, tiene al menos una raíz real o compleja.

Corolario.

Toda ecuación polinomial de grado n, de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$$

Tiene exactamente n raíces.

A continuación enunciaremos una regla que puede ser muy útil a la hora de buscar las raíces o ceros de una ecuación polinomial, tarea que en general puede ser muy difícil debido a que dichas raíces pueden ser racionales, irracionales o complejas.

Regla de los signos de Descartes.

1. El número máximo de raíces reales positivas de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ no es mayor que el número de cambios de signo en $f(x)$.

2. El número de raíces reales negativas de la misma ecuación no es mayor que el número de cambios de signo en $f(-x)$.

Ejemplo 18.

De acuerdo a la Regla de los signos de Descartes, indica cuál es el número máximo de raíces reales positivas que puede tener la función polinomial $f(x) = 4x^4 – x^3 + 2x^2 – 8x – 4$.

Solución. Como la función $f(x) = 4x^4 – x^3 + 2x^2 – 8x – 4$, tiene tres cambios de signo, concluimos que tiene a lo más tres raíces reales positivas.
$f(-x) = (-x)^4 – (-x)^3 + 2(-x)^2 – 8(-x) – 4 = x^4 + x^3 + 2x^2 + 8x – 4$, tiene solo 1 cambio de signos, por lo que puede tener a lo más una raíz real negativa.

1.4. Función racional.

Definición.

Una función racional es una relación de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

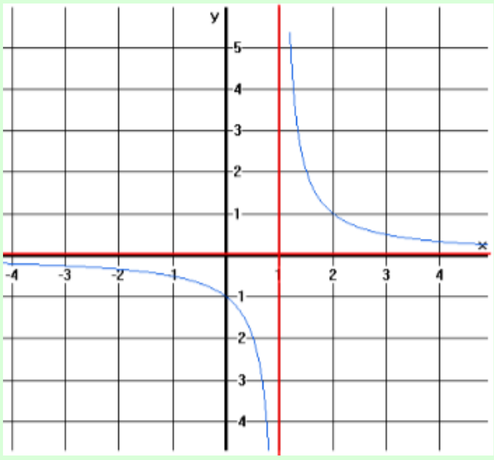
Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 19.

Sea $f(x) = \frac{1}{x-1}$. . Trazar la gráfica de la función y determinar el dominio, el contradominio y el rango de la función.

*Solución.*El dominio de la función son todos los valores $x \in \mathbf{R}$ para los cuales $f(x) \in \mathbf{R}$, es decir, que tenga sentido. Como se trata de una función racional (tiene denominador), hay que cuidar que ese denominador sea siempre distinto de cero, y para ello, debemos pedir que $x \neq 1$
Así que el dominio consta de todos los números reales, excepto el 1, o sea $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$ Asignando a x algunos valores adecuados, podemos construir la siguiente tabla y graficar los puntos obtenidos:

x	y
-4	$-1/5$
-3	$-1/4$
-2	$-1/3$
-1	$-1/2$
0	-1
1	No existe
2	$1/2$
3	$1/3$
4	$1/4$



De la gráfica vemos cómo x, jamás adopta el valor de 1. El rango de la función son todos los números reales, excepto el cero, pues $f(x)$ toma valores en todo $\mathbf{R}$ pero jamás alcanza el valor de cero.
Lo anterior se justifica diciendo que la gráfica tiene dos **asíntotas**. Una de ellas es la horizontal $y = 0$, y la otra es la vertical $x = 1$. Las asíntotas son rectas que rigen el comportamiento de la función. La gráfica jamás se interseca con éstas pero puede verse que cada vez se aproximan más a estas.

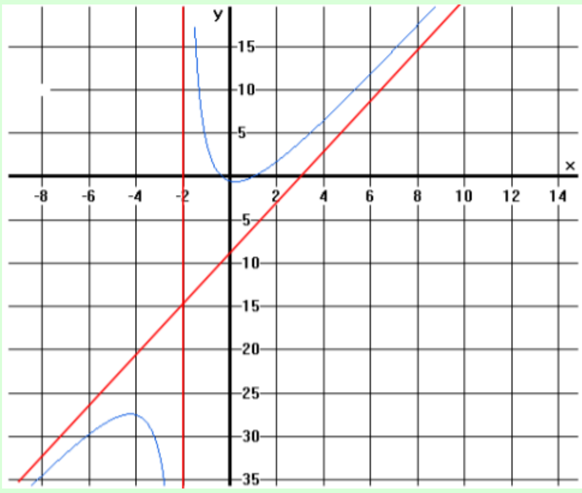
Ejemplo 20.

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x+2}$ *Solución.*Aquí debemos pedir que $x \neq 2$, es decir, -2 está excluido del dominio. Lo que podemos hacer ahora es buscar algunos puntos fáciles de calcular, por ejemplo, veamos que $f(0) = -1/2; f(1) = 0; f(-1) = 4$.

Encontremos las raíces, es decir las x's tales que $\frac{3x^2-2x-1}{x+2} = 0$. Como se trata de una fracción igualada a cero, el numerador deberá valer cero, es decir $3x^2 – 2x – 1 = 0$. Si factorizamos, obtenemos que:

$$(3x + 1)(x – 1) = 0$$

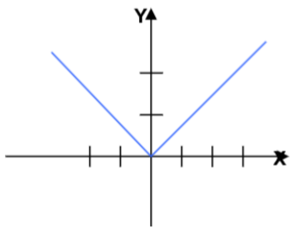
por lo que $x = -1/3$ y $x = 1$, son las raíces buscadas. Si efectuamos la división $\frac{3x^2-2x-1}{x+2}$ obtenemos que $f(x) = 3x - 8 + \frac{15}{x+2}$, de donde concluimos que habrá dos asíntotas. Una asíntota es la vertical $x = -2$, ya que dicho valor quedó excluido del dominio, y la otra es la recta $y = 3x – 8$, ya que podemos imaginarnos que conforme x adopte valores cada vez más grandes, la fracción que nos quedó adoptará valores cada vez más pequeños y por lo tanto $f(x)$ será “muy parecida” a la recta $y = 3x – 8$.



1.5. *Funciones definidas por segmentos*

En ocasiones podemos encontrarnos con funciones, que no tienen una única regla de correspondencia para todo su dominio, o que no necesariamente está definida por una sola fórmula. Puede haber casos de funciones cuya regla de correspondencia está definida por intervalos.

Como ejemplo consideremos la función valor absoluto $f(x) = |x|$ De la definición de valor absoluto, sabemos que
$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$
Si graficamos obtenemos una gráfica como esta:



En el intervalo $x \geq 0$, la grafica es $y = x$
Mientras que para $x < 0$, se tiene que $y = -x$.

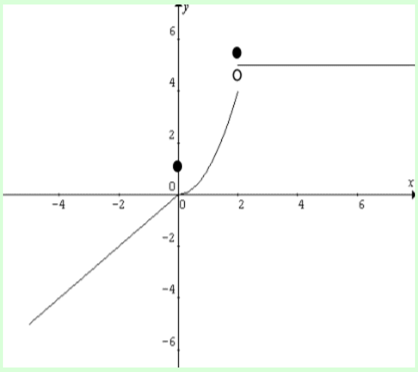
Observa que en el intervalo de números $(0, \infty)$) la gráfica de la función es una recta con pendiente 1 mientras que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la gráfica es una recta con pendiente -1. Estas dos rectas coinciden en $x = 0$, en donde ambas $y = 0$. Veamos otro ejemplo de función definida por segmentos.

Ejemplo 21.

Graficar la función definida por.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \leq x < 5 \\ 5 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

*Solución.*En este caso tenemos tres intervalos:



En el intervalo $(-\infty, 0))$ graficaremos la recta $y = x$.

En $(0, 2)$ la gráfica será un segmento de la parábola $y = x^2$

Finalmente en $(2, \infty)$ tendremos la recta horizontal dada por la función constante $y = 5$.

1.6. *Tipos de funciones*

Hemos estudiado diversas funciones que a manera de resumen podríamos organizar y enlistar como sigue:

Funciones algebraicas. Aquellas funciones que podemos obtener mediante la combinación de las operaciones aritméticas que conocemos (sumas, restas, productos, cocientes, potencias y raíces de polinomios).

Dentro de estas tenemos a la función polinomial, que es una expresión de la forma

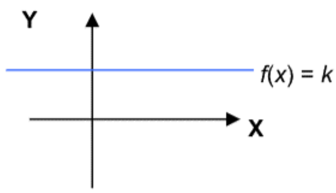
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

llamada polinomio de grado n, donde n es un número natural. Como casos particulares tenemos:

Si $n = 0$, se tiene un polinomio de grado cero, que consta únicamente del término constante o independiente. Esta función es llamada *función constante*, y es de la forma

$$f(x) = k, k \in \mathbf{R}$$

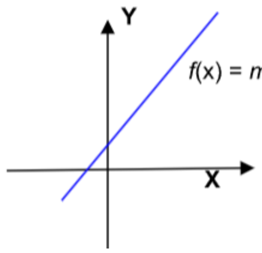
Es una función que a cualquier valor de x de su dominio, le asocia siempre el mismo valor k. Si la graficamos obtenemos una recta horizontal como la que sigue:



Si $n = 1$ obtenemos la *función lineal* que ya estudiamos con detalle:

$$f(x) = mx + b, m, b \in \mathbf{R}$$

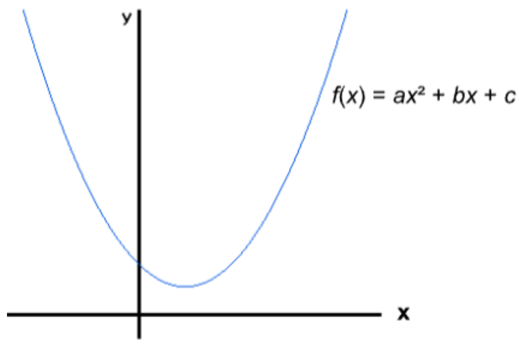
Es un polinomio de grado 1, y su representación gráfica es una recta con pendiente m y ordenada al origen b.



Si $n = 2$, tenemos un polinomio de segundo grado, o *función cuadrática* que ya hemos repasado también. Es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

Si la graficamos vemos que es una parábola que bien puede ser cóncava hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo si $a < 0$.



Si $n > 2$, obtenemos la función que bien puede ser de tercer grado, de cuarto grado, o incluso de grados más avanzados. Todas estas no se suelen estudiar por separado, sino que las estudiamos dentro del caso general del polinomio de grado n. Sus gráficas tienden a ser ya curvas más irregulares cuyas propiedades se estudian utilizando las herramientas del cálculo diferencial. Un caso bastante particular de la función polinomial

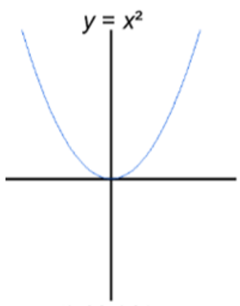
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

es en el que figura sólo el término de grado n.

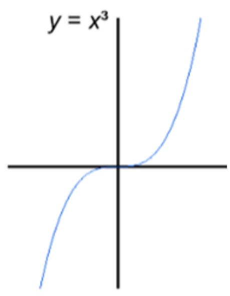
La *función potencial* de grado n es un caso especial de la polinomial y es de la forma:

$$f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$$

El tipo de gráfica que resulta depende de si n es un número natural par o impar. En el primer caso obtendremos una gráfica similar a la de $f(x) = x^2$, que es una curva simétrica respecto al eje Y. En el segundo caso se obtendrá una curva similar a la que se obtiene al graficar $f(x) = x^3$, que es una curva simétrica respecto al origen.



n es par



n es impar

También dentro de las algebraicas tenemos a la función **racional**, definida como sigue:

Una *función racional* es una función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x), Q(x)$ son funciones polinomiales, tales que $Q(x) \neq 0$, para todo valor x en el dominio de Q.

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^3(x-1)}{x^2-9}$ son una función racional.

Es claro que cualquier función polinomial $f(x)$ es considerada también una función racional, ya que puede escribirse como el cociente de dicha función $f(x)$ entre el polinomio $g(x) = 1$. El dominio de una función racional está formado por todos los números reales, excepto aquellos que hagan cero el denominador.

Todas estas funciones entran en la clasificación de las funciones algebraicas. Otros ejemplos de funciones algebraicas son:

$$f(x) = \sqrt{2x-1}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x}, f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 3, etc$$

Ejercicio 7.

Indica cuál es el dominio de cada una de las siguientes funciones.

1. $y = 3x^2 - 4$
2. $f(x) = \frac{1}{x-2}$
3. $g(x) = \frac{2x-3}{x^2+2x}$
4. $h(x) = \sqrt{x-4}$
5. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2-1}}$

Funciones trascendentes. Además de todas las funciones que hemos comentado en este capítulo, existen otras que no son algebraicas. Estas las estudiaremos con detalle en el siguiente módulo y algunos ejemplos son:

1. Las funciones circulares.
2. La función exponencial.
3. La función logarítmica.

1.7. Operaciones con funciones.

Veremos ahora cómo construir nuevas funciones a partir de otras, definiendo algunas operaciones.

Definición

Sean f y g funciones cuyos dominios D_f, D_g son subconjuntos de $\mathbf{R}$

1. La suma $f+g$ es la función definida por $S(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. El producto fg es la función definida por $P(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$.
3. El cociente f/g es la función definida por $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.
   En el caso de S y P el dominio es $D_f \cap D_g$.
   Para la función Q, el dominio es $D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$

Ejemplo 22.

Sean $f(x) = 2x–1$ y $g(x) = x^2$. Encontrar $S(x), P(x), Q(x)$.

Solución. $S(x) = f(x) + g(x) = [2x–1] + x^2 = x^2 + 2x–1$.

$P(x) = f(x)g(x) = (2x–1)(x^2) = 2x^3 - x^2$
$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-1}{x^2}$

Hay otra manera de generar nuevas funciones mediante una operación conocida como composición. Componer dos funciones es evaluar una función en otra. Veamos.

Definición.

Sean f y g dos funciones cuyos dominios $D_f y D_g$ son subconjuntos de $\mathbf{R}$.

Definimos la función compuesta $f \cdot g$ (léase f composición g) como:

$$f(x) \cdot g(x) = f(g(x))$$

donde el dominio de $f \cdot g = D_{f \cdot g} = \{x | x \in D_f y f(x) \in D_g\}$

Ejemplo 23.

Sean $f(x) = 2x–1$ y $g(x) = x^2$ como en el ejemplo anterior. Encontrar $f \cdot g$ y también $g \cdot f$.

*Solución.*Encontremos primero $f \cdot g = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2)–1 = 2x^2 - 1$.

Ahora, $g \cdot f = g(f(x)) = g(2x–1) = (2x–1)^2$.

Ejercicio 8.

Encuentra en cada caso las funciones suma, producto y cociente, así como la composición $f(g(x))$.

1. $f(x) = x; g(x) = 3 - 2x$.
2. $f(x) = 5x - 3; g(x) = x^2$
3. $f(x) = 2x^2 - 5x; g(x) = 2x - 1$
4. $f(x) = x^3; g(x) = 2x^2 + 3$
5. $f(x) = x^2 - 5x + 6; g(x) = \frac{x-1}{2}$
6. $f(x) = \sqrt{x};; g(x)x^2 + 4$
7. $f(x) = x–1; g(x) = x^2 + 8$

1.8. Ejercicios y problemas.

1. Graficar las ecuaciones siguientes. Encontrar m y b.
   a) $f(x) = 4x + 2$
   b) $f(x) = -2x$
   c) $f(x) = x$
   d) $f(x) = 2$
   e) $f(x) = 3x–2$

2. Determina el valor de la pendiente m, y ordenada al origen b, de cada una de las ecuaciones siguientes.

   a) $2x + 3y = 0$
   b) $y – x = 1$
   c) $2x + y – 5 = 0$

3. Traza la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

   a) $y = x^2 + 4x – 5$
   b) $y = -x^2 – 2x + 8$
   c) $y = x^2 + 6x + 9$
   d) $y = x^2 + 4$

4. Indica si cada ecuación representa una parábola cóncava hacia arriba, una parábola cóncava hacia abajo, o ninguna de las dos.

   a) $y = x^2 + 2x + 3$
   b) $y = 7 – 6x – x^2$
   c) $y = 5 + 5x^2$
   d) $y = x^2 - x$
   e) $y = 2 – x – x^2$
   f) $y = 2 + x – x^2$
   g) $y = -2x^2 + 5x + 1$
   h) $y = 2x^2 - 3$
   i) $y = 3 – 2x^2$
   j) $y = 2x – 3$
   k) $y = 3 – 2x$
   l) $y = x^2 – x – 1$
   m) $y = 2x^2 – 3x + 1$
   n) $y = -4x^2 + 2x + 1$
   ñ) $y = 8x^2 – 10x$
   o) $y = 3x^2 + 7$
   p) $y = -3x^2 + 7$
   q) $x = 3y^2 + 7$
   r) $x = -3y^2 + 7$

5. Encuentra las coordenadas del vértice de cada una de las parábolas dadas por las ecuaciones siguientes.

   a) $y = 2x^2 – 3x + 1$
   b) $y = -2x^2 + 12x + 20$
   c) $y = 5x^2 – 10x + 1$
   d) $y = -x^2 + 2x – 1$
   e) $y = 2x^2 – 20x + 4$
   f) $y = 2x^2 – 4x – 6$
   g) $y = 8x^2 + 6$
   h) $y = -x^2 + 3x – 5$

6. Lee con atención los siguientes problemas y escribe una ecuación que permita resolverlos.

   a) El perímetro de una hoja rectangular es de 32 cm. Si su área debe ser máxima, ¿cuál debe ser la longitud de sus lados?
   b) Sean x, z dos números cuya suma es igual a 17 y cuyo producto p es máximo. ¿Cuáles son dichos números?

c) ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de área máxima que puede ser cercado con 440 m de tela de alambre? (sea y el área del rectángulo y x la longitud de uno de sus lados.).

d) Encontrar dos números cuya suma sea 60 y su producto sea máximo. (indica qué hay qué hacer para resolver éste problema).

7. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2–7x + 6 = 0$
   b) $8x^2–10x + 2 = 0$
   c) $x^2–4x–21 = 0$
   d) $x^2 + 11x + 24 = 0$
   e) $3x^2–5x + 2 = 0$
   f) $x^2 + 16x–64 = 0$
   g) $–3x^2 + x–5 = 0$

8. Resuelve los problemas dados a continuación.

   a) Si las dimensiones de un rectángulo difieren en un metro y su área es igual a $110m^2$, ¿cuáles son las dimensiones de éste rectángulo?
   b) Un terreno rectangular tiene $260m^2$ de superficie. ¿Cuáles son sus dimensiones si el largo es el triple del ancho?

9. Suma los polinomios $f(x), g(x)$, para encontrar $f(x) + g(x)$.

   a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x + 1; g(x) = -3x^3 - 3x^2 + 2$
   b) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x; g(x) = 2x^2 - x + 3$
   c) $f(x) = 3x^3–2x^2–1; g(x) = -2x^3 + x–10$
   d) $f(x) = 12x^4 - 14x^3 + 2; g(x) = x^5 + 13x^3 - x^2 - 8$
   e) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 1/3x + 2/3; g(x) = x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 5/3x + 1/3$
   f) $f(x) = -15x^6 - 8x^5 + 2x^3 - x^2; g(x) = 7x^6 - 8x^5 + 2x^4 - 4x^2$

10. Multiplica los polinomios f(x) por g(x).

    a) $f(x) = 3x^3–2x^2 + 6x–4; g(x) = 2x^2–4$
    b) $f(x) = x–1; g(x) = x^2–2x + 6$
    c) $f(x) = 5x^2 + 2x–1; g(x) = -x^3–x$
    d) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x; g(x) = 2x^2 + x + 3$
    e) $f(x) = 3x^3–2x^2 + 2; g(x) = x^2–x$

11. Encontrar el cociente y el residuo que se obtienen al efectuar las siguientes divisiones.

    a) $(2x^3–4x–2) \div (2 + 2x)$
    b) $(7x^2–2x + 6) \div (x + 2)$
    c) $\frac{7x^2-x-6}{x-2}$
    d) $\frac{9x^3-3x^2-8x-2}{3x+1}$
    e) $(2x4 + 2x^2–1) \div (x^2 + 2)$
    f) $(2x^4–9x^3–14^2 + 6x + 6)/(–x^2–3x + 2)$
    g) $(4x^4–20x^3 + 16x^2 + 8x–10) \div (2x^3–2x + 1)$

12. Indica en cuál de las cuatro opciones aparece un factor del polinomio dado en cada caso.

    a) $f(x) = 6x^3 + 9x^2–8x–12$
       1) $4x^2–3$
       2) $3x^2 + 4$
       3) $2x–3$
       4) $2x + 2$

b) $f(x) = x^3–3x^2–4x + 12$

1) $x^2 + 2$
2) $x^2–3$
3) $x–2$
4) $x + 3$

c) $f(x) = 2x^3–x^2–25x–12$

1) $x + 3$
2) $x–3$
3) $x–2$
4) $x + 2$

d) $f(x) = x^3–4x^2 + x + 6$

1) $x + 1$
2) $x + 5$
3) $x–1$
4) $x–5$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2–x–2$

1) x
2) $x + 1$
3) $x–1$
4) $2x + 3$

f) $f(x) = 3x^4–15x^3 + 9x^2 + 15x–12$

1) $x + 4$
2) $2x + 2$
3) $x–4$
4) $2x + 4$

13. Contesta:

a) De acuerdo con el Teorema Fundamental del Álgebra, ¿cuál es el número máximo de raíces reales que puede tener la función $f(x) = -3x^5–9x^4 + 6x^3–7x^2 + 2x + 10$?

b) De acuerdo a la Regla de los signos de Descartes, indica cuál es el número máximo de raíces reales positivas que puede tener cada función polinomial:

c) $f(x) = 4x^4–x^3 + 2x^2–8x–4$

d) $g(x) = 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x–4$

14. Encuentra gráficamente las raíces racionales de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^3 + x^2–12x–4 = 0$

b) $x^3–3x + 2 = 0$

c) $3x^3 + 6x^2–15x–18 = 0$

d) $3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$

15. Encuentra gráficamente las raíces racionales de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^3 + x^2–12x–4$

b) $y = x^3–3x + 2$

c) $y = 3x^3 + 6x^2–15x–18$

d) $y = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 2$

16. Traza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x^3$

b) $y = x^3 - 2$

c) $f(x) = x^2 + 3$

d) $f(x) = 3–2x$

e) $g(x) = x^2 + 2x–1$

f) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$

g) $G(x) = |x| + x$

h) $P(x) = 1/x$

i) $y = 1/2x–3$

j) $\sqrt{x - 2}$

k) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \geq 0 \\ x - 1 & si \quad -3 < x < 0 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si \quad -4 < x <\leq 1 \\ 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

17. Encuentra el dominio de cada función.

a) $g(x) = 4 - x^2$

b) $f(x) = x$

c) $y = \frac{1}{x-2}$

d) $y = \frac{1}{x^2-1}$

e) $y = \sqrt{x}$

f) $h(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+4}$

g) $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$

h) $y = \frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}$

18. Traza con ayuda de la computadora la gráfica de las siguientes funciones, encontrando raíces, asíntotas, dominio y rango en cada caso.

a) $f(x) = 3x^2 + k$; donde $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) $h(x) = 3x^3 - Bx^2 + Cx + D$. Propón valores para B, C y D y observa qué sucede al variar cada uno de ellos. Escribe tus conclusiones.

c) Una gráfica que tenga 4 raíces.

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$