Cimientos Matemáticos

Módulo 18: Funciones trascendentes

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Modulo 18. *FUNCIONES TRASCENDENTES.*

1.1. La circunferencia unitaria.

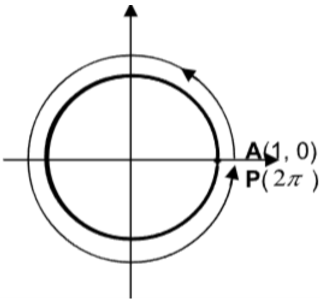
Consideremos una circunferencia C con centro en el origen O del plano XY y radio $r = 1$. Ésta se conoce como circunferencia unitaria. Recordemos que el perímetro o longitud de una circunferencia es igual al producto de π por su diámetro, o sea

$$C = 3\pi r$$

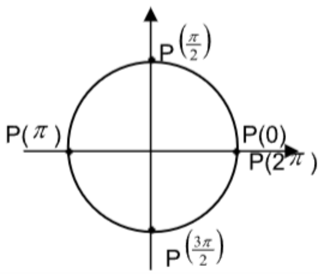
pero para el caso de la circunferencia unitaria, r = 1, y nos queda que

$$C = 2\pi$$

Como la longitud de C es 2π , un arco de una revolución completa mide $\alpha = 2\pi$. El punto inicial de dicho arco es $A(1, 0)$ y su punto terminal es $P(2\pi)$.



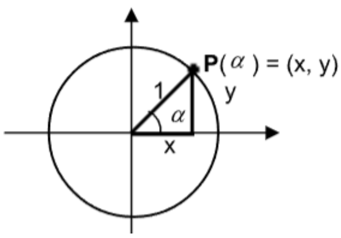
Similarmente podemos localizar los puntos $P(\pi)$ y $P(\frac{\pi}{2})$, pues $P(\pi)$ es el punto terminal del arco cuya longitud es π , o sea, media revolución; y $P(\frac{\pi}{2})$ es el punto correspondiente a 1/4 de revolución.



El punto A puede pensarse como el punto terminal de un arco de longitud cero. Con los puntos anteriores como referencia podemos localizar en forma aproximada cualquier otro punto $P(\alpha)$ en C utilizando las relaciones que estudiamos anteriormente en los módulos de trigonometría.

1.1.1. Definición de las funciones circulares.

Sea $P(\alpha)$ un punto sobre la circunferencia unitaria C. (es una circunferencia con centro en el origen y radio $r = 1$). $P(\alpha)$ es el punto terminal del arco cuya longitud es $AP = \alpha$.



El punto P tiene coordenadas (x, y), que son las distancias horizontal y vertical de O a P, respectivamente.

Notemos entonces que x e y son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $r = 1$ (por ser el radio de la circunferencia unitaria) y en función de estos datos podemos obtener las funciones trigonométricas o circulares de α.

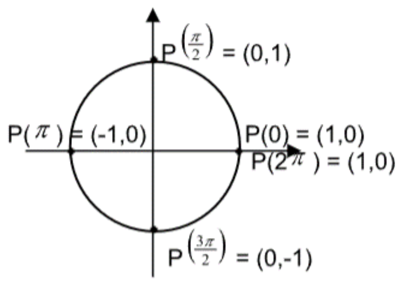
1. $\sin\alpha \frac{y}{1} = y$
2. $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$
3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
4. $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
5. $\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$
6. $\csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$

Las ecuaciones (1) y (2) nos muestran que si $P(x, y)$ es un punto sobre C cuyo arco (o ángulo) asociado es α , entonces

$$x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$$

Así que podemos escribir las coordenadas x, y de $P(x, y)$ como $P(cos\alpha, sen\alpha)$. Las otras 4 funciones pueden definirse en términos de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$. Veamos también que las tres últimas funciones circulares son las funciones recíprocas de las tres primeras, a saber: el seno y la cosecante son recíprocas, del mismo modo que el coseno y la secante, y la tangente con la cotangente.

Determinemos las funciones seno y coseno de $0, \frac{\pi}{2}, \pi\frac{3\pi}{2}, 2\pi$.
Esto es sencillo de hacer, pues las coordenadas de estos puntos terminales son conocidas y se muestran en la siguiente gráfica.



El punto $P(0)$ coincide obviamente con el punto $P(2\pi)$.

Ahora, usando que si las coordenadas de $P(\beta)$ son $x = \cos\beta, y = \sin\beta$, obtenemos la siguiente tabla, con las funciones circulares de cada uno de estos números.

β	P(x,y)	$\sin\beta$	$\cos\beta$
0	(1,0)	0	1
$\frac{\pi}{2}$	(0,1)	1	0
π	(-1,0)	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	(0,-1)	-1	0
2π	(1,0)	0	1

1.2. Función Seno.

Definición.

La ecuación $f(x) = \sin x$, define una funciona llamada "seno", cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es decir $x \in \mathbf{R}$

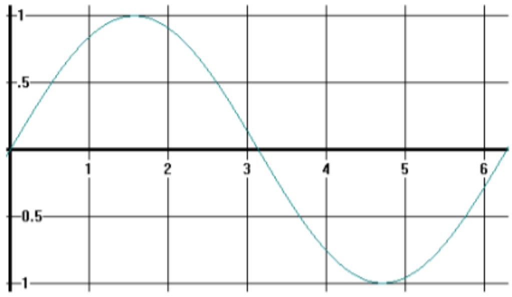
Ésta, a diferencia de las funciones del módulo anterior, no es una función algebraica, sino una función que llamamos *trascendente.*

A medida que x toma valores en $\mathbf{R}$, la función seno oscila entre -1 y 1, y tenemos que

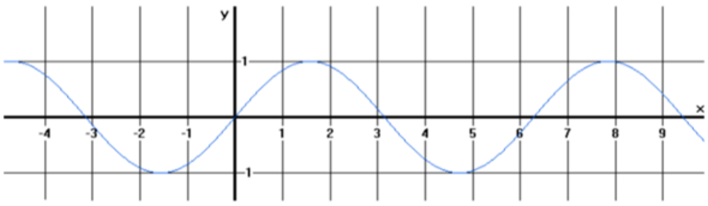
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

En otras palabras, el contradominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$.
Vamos a construir la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, dando algunos valores a x.

x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	1



Si continuamos graficando valores mayores de x, y también valores negativos, obtendremos:



1.2.1. Propiedades de la función $f(x) = \sin x$.

1. La función es periódica, con periodo igual a 2π .
2. La función es creciente de 0 a 1 entre 0 y 2π , y también crece de -1 a 0 entre $\frac{3\pi}{2}$, y 2π
3. La función es decreciente entre $\frac{\pi}{2}$, y π y también entre π y $\frac{3\pi}{2}$
4. La función es positiva entre 0 y π y negativa entre πy 2π .
5. Para todo $x \in \mathbf{R}$, sen x, oscila entre -1 y 1.

1.3. Función coseno.

De manera similar, definimos la función coseno como sigue:

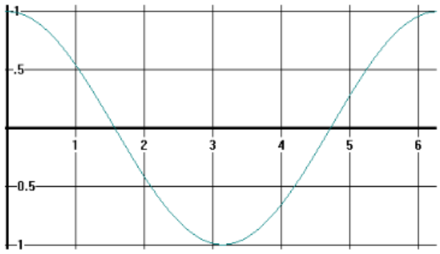
Definición.

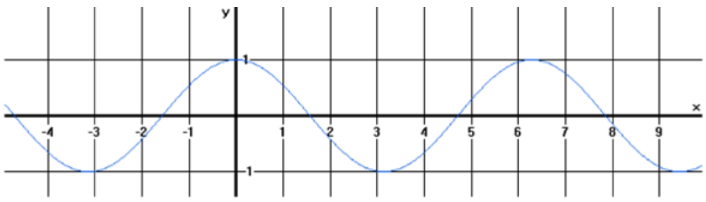
La ecuación $f(x) = \cos x$, define la función coseno, y tiene como dominio a todos los números reales, y como contradominio al intervalo $[-1, 1]$.

$$x\ in\mathbf{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$$

La gráfica de la función cos x, quedaría como sigue:

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1
$\frac{5\pi}{2}$	0





1.3.1. Propiedades de la función $f(x) = \cos x$.

1. La función es periódica, siendo su periodo igual a 2π .
2. La función es creciente de -1 a 0 entre π y $\frac{3\pi}{2}$, y de 0 a 1 entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π
3. La función es decreciente de 1 a 0 entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y de 0 a -1, entre $\frac{\pi}{2}$ y π
4. La función es positiva de 0 a $\frac{\pi}{2}$, y de $\frac{3\pi}{2}$, y de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π; y negativa entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$
5. Para todo $x \in \mathbf{R}$, cos x, oscila entre -1 y 1.

1.4. *Función exponencial.*

Una función exponencial, de las más simples es de la forma

$$f(x) = b^x$$

Donde $x \in \mathbf{R}$ y b es una constante positiva.

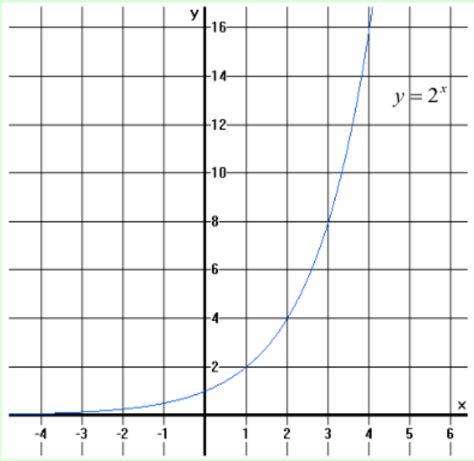
Veamos con un ejemplo el comportamiento de este tipo de función.

Ejemplo 1.

Graficar la función $y = 2^x$

Solución. Daremos a x los valores de $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4.

x	y	(x, y)
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$(-3, 1/8)$
-2	$y = 2^{-2} = 1/4$	$(-2, 1/4)$
-1	$y = 1/2$	$(-1, 1/2)$
0	$y = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	2	$(1, 2)$
2	4	$(2, 4)$
3	8	$(3, 8)$
4	16	$(4, 16)$



Aquí, la x hace el papel de exponente, por lo que es necesario que recordemos aquí la ley de los exponentes $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$al momento de evaluar la función, y también que $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. Notemos que hemos obtenido una función creciente. Para valores de $x > 0$, los valores de y son mayores que la unidad y la función crece mucho. En $x = 0$, la función vale 1, y para $x < 0$, los valores de y son menores a la unidad, y a medida que x es menor, y va siendo cada vez más menor, pero nunca alcanzará el valor de cero.
En este ejemplo, la base es un número mayor que la unidad ($b = 2$), veamos qué ocurre en caso contrario, es decir, si b es un número más chico que 1.

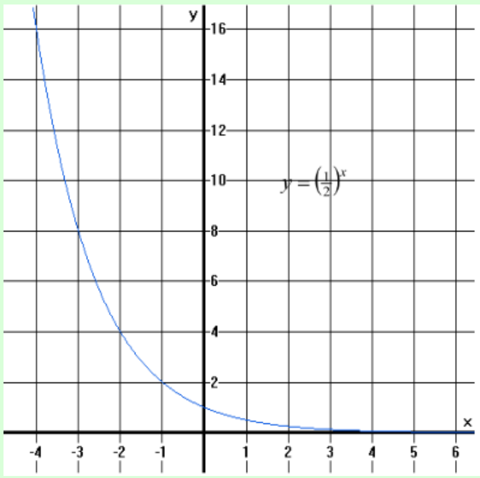
Ejemplo 2.

Grafíquese la función $y = (\frac{1}{2})^x$

Solución. Procedemos análogamente al ejemplo anterior.

-4	$y = (1/2)^{-4} = 16$	$(-4, 16)$
-3	8	$(-3, 8)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	$(0, 1)$
1	$1/2$	$(1, 1/2)$
2	$1/4$	$(2, 1/4)$
3	$1/9$	$(3, 1/9)$
4	$1/16$	$(4, 1/16)$

Ejemplo 2cont.



En este caso obtenemos una curva decreciente, aunque muy similar a la anterior, pues ambas funciones se comportan de una manera simétrica. Aquí si $x > 0$, los valores de y decrecen y se hacen cada vez mas chicos que la unidad, mientras que para $x < 0$ los valores de y son mayores que 1.

1.4.1. Propiedades básicas de la función exponencial.

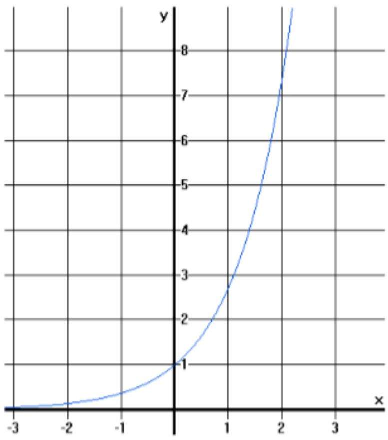
En forma resumida y general, las propiedades de estas funciones son las siguientes:

1. La función es siempre positiva para toda $x \in \mathbf{R}$
2. Si $b > 1$, la función es creciente.
3. Si $b < 1$, la función es decreciente.
4. Para cualquier valor de b, se tiene $y = 1$ cuando $x = 0$.
5. Si $b > 1$ ó $b < 1$, la función nunca toca al eje X.

Una función exponencial de particular importancia se obtiene cuando la base es $b = e = 2.71828182846...$

$$y = e^x$$

x	$f(x)$
0	1
1	$e = 2.71...$
2	e^2
3	e^3
4	e^4



1.5. Progresiones geométricas.

Cuenta una leyenda que alguna vez existió un rey, que en cierta ocasión se encontraba muy aburrido, así que un anciano decidió inventar un juego para entretenimiento del rey. Éste juego lo conocemos actualmente como ajedrez. El rey quedó tan divertido con aquel juego que decidió premiar al anciano con cualquier cosa que éste le pidiera.

El anciano dijo: – ¡Gran rey! Como seguramente habrás notado, el tablero del juego tiene 64 cuadrados. Me daré por recompensado si me otorgas dos granos de trigo por el primer cuadrado, cuatro por el segundo, ocho por el tercero, y así sucesivamente.

El rey se sintió ofendido, pensando que había desaprovechado su intención de recompensa, con aquella insignificante petición. Pero quedó perplejo cuando ordenó que se hicieran los cálculos para otorgar el número de granos de trigo pedido por el anciano, pues, aunque aparentemente era poco, el número de granos por el cuadro número 64 er sorprendentemente grande.

Veamos:
Por el primer cuadro, el rey debía otorgar 2 grano al anciano.
Por el segundo cuadro, debía darle $22 = 4$.
Por el tercero, correspondían $222 = 8$
De modo que tenemos la sucesión $2, 4, 8, 16, ...$

Ejercicio 1.

¿Cuántos granos debió dar el rey al anciano por el $5, 6, 7, 8$ y 9 cuadrados? Escribe los siguientes 5 números de la sucesión $2, 4, 8, 16, ...$
La sucesión $2, 4, 8, 16...$ está definida por una función exponencial: $y = 2^x$, donde $x \in \mathbf{N}$

pues cada término se obtiene al sustituir $x = 1, 2, 3, 4, ...$ en la ecuación $y = 2^x$, y como hemos visto, se trata de una función que crece demasiado, de modo que por el 64º cuadro el rey debía dar al anciano 2^{64} granos de trigo, y la cantidad total de granos es tan grande que, ¡ocuparía un volumen de $1km^3$!

Una sucesión de números como $2, 4, 8, 16, ...$ es una progresión geométrica. En esta veamos que se obtiene cada número al multiplicar el anterior por 2: $22 = 4; 42 = 8; 82 = 16$, etc.

Definición.

Una progresión geométrica es una sucesión de números, en la que, cada término se obtiene al multiplicar el anterior por un mismo número, llamado razón común.

Cada progresión geométrica es definida por una función exponencial.
Por ejemplo la función $y = 3^x, x\ in \mathbf{N}$, define la progresión geométrica

$$3, 9, 27, 81, ...$$

donde se ve que la razón común es 3.
La progresión $-25, -5, -1, ...,$ tiene razón común 51

Ejercicio 2.

En la tabla siguiente damos algunos ejemplos. Completa lo que falte.

Función	Dominio	Progresión	Razon Común
$y = 3^x$	$\mathbf{N}$	3,9,27,81...3ˆx	3
$f(x) = 2^{2-x}$	$\mathbf{N}$	$2, 1, 1/2, 1/4, ...$	$1/2$
$f(x) = -(5^{3-x})$	$x < 8, x \in \mathbf{N}$	$-25, -5, -1, -1/5, ...$	$1/5$
$f(x) = 2^{3-x}$		$4, 2, 1, 1/, 1/4, ...$	
$f(x) = (1/4)^x$			

1.5.1. Notación para las progresiones geométricas.

En una progresión geométrica
$a_1 =$ primer termino de la progresión
$r =$ razon comun
$n =$número de terminos de la progresión.
$a_n =$ ultimo termino de la progresión.
$S_n =$ suma de los n primeros términos de la progresión

En éstos términos cualquier progresión geométrica puede escribirse como

$$a_1, a_r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, ...a_1 r^{n-1}$$

De donde vemos que el último término es

$$a_n = a_1^{n-1} \tag{1}$$

1.5.2. Obtención de la suma de términos. (S_n)

Dada cualquier progresión geométrica, puede calcularse la suma de sus términos como

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 + ... + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando por r se obtiene

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 + a_1 r^6 + ... + a_1 r^n$$

Restando ésta ultima igualdad, de la primera, obtenemos que
o sea $S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$
de donde despejamos S_n, $S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n$
Pero como $a_n = a_1 r^{n-1}$, se tiene

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r} \tag{2}$$

o bien

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \tag{3}$$

Ejercicio 3.

En una progresión geométrica se tiene que $a_1 = -2, r = 2$ y $n = 8$. Escríbase la progresión y obténgase el último término de ella y también su suma.

*Solución.*La progresión debe ser $-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256$.
De ahí se ve que el último término (octavo) es -256.
Si sumamos "a mano" los 8 términos obtenemos que la suma es

$$-2 + (-4) + (-8) + (-16) + (-32) + (-64) + (-128) + (-256) = -510$$

Esto puede resultar tardado en algunas ocasiones, por ello convendrá más usar las expresiones (1), (2) y (3).

Usando las expresiones, se tiene que:
El último término es: $a_n = a_1 r^{n-1} = (-2)(2)^{n-1} = (-2)(2)^7 = (-2)(128) = -256$

La suma: $S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r} \implies S_n = \frac{-2-2(-256)}{1-2} = \frac{-2+512}{-1} = -510$
que son los mismos valores obtenidos a mano. Quizás a veces resulte más fácil hacerlo a mano, que usar las expresiones. Eso ya dependerá de cada enfoque.

1.5.3. Progresiones geométricas infinitas.

Cuando n es infinito y $|r| < 1$, el término n-ésimo de la progresión se hace cada vez más chico y su valor se acerca cada vez más a cero.

Como ejemplo veamos que en la progresión $1/3, 1/9, 1/27, 1/81, ..., 1/3^n, ...$ los términos se hacen cada vez menores. Cuando esto ocurre decimos que el n-ésimo término tiende a cero, cuando n tiende a infinito.

En una progresión de este estilo, podemos obtener la suma de todos los términos usando (S-3)

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Como $|r| < |$, el termino r^n tiende a cero cuando n crece indefinidamente, así que

$$S_n = \frac{a_1(1-0)}{1-r}$$

osea

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \tag{4}$$

1.6. La función logaritmo.

Cuando tenemos una ecuación exponencial como

$$a^y = x$$

se dice que la y es el exponente al que tenemos que elevar la a , para obtener x.Lo que acabamos de decir también se expresa escribiendo:

$$y = log_a x$$

que se lee: y es el logaritmo base a de x.

Ejemplo 3.

1. $log_2 8 = 3$, significa que $2^3 = 8$
2. $log_3 81 = 4$, significa que $3^4 = 81$
3. $log_6 36 == 2$, significa que $6^2 = 36$
4. $log_9 1 = 0$, significa que $9^0 = 1$
5. $log_{1/3} 9 = -2$, significa que $(1/3)^{-2} = 3^2 = 9$

Como vemos entonces, la expresión $a^y = x$ es equivalente a $y = log_a x$. Como en realidad los logaritmos son exponentes se pueden deducir varias propiedades útiles utilizando las mismas propiedades de los exponentes.

1.6.1. Propiedades básicas de los logaritmos.

Definición.

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N$$

2. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$log_a(\frac{M}{N}) = log_a M - log_a N$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al exponente, por el logaritmo de la base.

$$log_a(M^k) = k log_a M$$

Estas tres propiedades pueden demostrarse fácilmente usando la definición de logaritmo.

$$y = log_a x \longleftrightarrow a^y = x$$

Ejemplo 4.

Analicemos un ejemplo de cada una:

1. $log_2(2 \cdot 4) = log_2 2 + log_2 4$
2. $log_5(1/25) = log_5 1 - log_5 25$
3. $log_3(9^2) = 2log_3 9$
   Se puede verificar que cada una de las expresiones anteriores es cierta, si se usa la definición de logaritmo.

La ecuación $y = log_a x$ define también una función, que es en realidad la función inversa de la exponencial $f(x) = a^x$. Nuevamente si hacemos $a = e = 2.71828182846...$, tenemos la función logaritmo natural, y se escribe $y = log_e x$, o simplemente:

$$y = lnx$$

1.6.2. Logaritmos comunes.

Como hemos visto, existen logaritmos de distintas bases. A los logaritmos tomados en base 10 se les conoce como logaritmos comunes, y son frecuentemente usados para abreviar algunas operaciones, usando las propiedades de los logaritmos.

Para obtener el logaritmo común de un número dado, se debe encontrar: 1) la parte entera, llamada característica; y 2) la parte decimal, llamada mantisa.

Para obtener la característica, analicemos que:

1. $log_{10}1000 = 3$, pues $10^3 = 1000$
2. $log_{10}100 = 2$, pues $10^2 = 100$
3. $log_{10}10 = 1$, pues $10^1 = 10$
4. $log_{10}1 = 0$, pues $10^0 = 1$
5. $log_{10}0.1 = -1$, pues $10^{-1} = 0.1$
6. $log_{10}0.01 = -2$, pues $10^{-2} = 0.01$
7. $log_{10}0.001 = -3$, pues $10^{-3} = 0.001$

Así que, como vemos, para números entre 1 y 9, la característica será 0, para números entre 10 y 99, la característica es 1, etc.

Más propiamente, la característica de un número con parte entera será positiva y es igual al número de cifras enteras, menos 1.

La característica de un número cuya parte entera es cero, será negativa, y es igual al número del lugar que ocupe la primera cifra significativa.

Nota: cuando se trata de logaritmos comunes (base 10) se ha convenido escribir log, en lugar de $log_1 0$, y también se escribe por ejemplo $\overline{2}$ en vez de -2.

Analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.

1. La característica de log 5279 es 3
2. La característica de log 74 995 es 4
3. La característica de log 343 es 2
4. La característica de log 0.721 es $\overline{3}$
5. La característica de log 0.0472 es $\overline{4}$

Para obtener las mantisas, se usan las tablas de logaritmos comunes. (son positivas siempre).

En el cálculo de los logaritmos comunes se acostumbra escribir la característica (que puede ser positiva o negativa, seguida de la mantisa (siempre positiva). De manera que si $x = logy$, se escribe x como la suma de la mantisa con la característica.

Ejemplo 6.

Efectuar la operación $log[(23.25)(0.15)]^7$

*Solución.*Usaremos los logaritmos y sus propiedades.
Sea $M = log[(23.25)(0.15)]^7 = 7[(23.25)(0.15)] = 7(log23.25 + log0.15) = 7(1.3664 + (\overline{1}.1761))$
Las mantisas se suman

$$= 7(0.5425) = 3.7975$$

El número obtenido es el logaritmo del resultado buscado. El número buscado es aquel cuyo logaritmo es 3.7976, así que deberá tener 4 cifras enteras (pues la característica es 3 = 4 -1) y lo encontramos usando la tabla de antilogaritmos, buscando el antilogaritmo de la mantisa .7975.

$$M = antilog3.7976 = 6273$$

Este número es muy aproximado al que se obtiene al hacer la operación directamente.

Ejercicio 4.

Efectuar las siguientes operaciones usando logaritmos.

1. $(345.9)(37.5)$
2. $\frac{114.15}{23}$
3. $(0.0092)(0.072)$
4. $\sqrt{\frac{0.75}{1.44}}$
5. $(\frac{240.11}{0.13})^5$

1.6.3. Logaritmos de cualquier base.

Los logaritmos comunes, pueden obtenerse fácilmente entonces de las tablas de logaritmos, pero puede ser que en algún calculo, se requiera obtener el logaritmo de alguna otra base a que no sea 10.

Para ello consideremos $y = log_a N$, entonces $a^y = N$

Si tomamos el logaritmo en base b a cada lado de la igualdad, tendremos que $log_b a^y = log_b N$, o bien $y log_b a = log_b N$, de donde $y = \frac{log_b N}{log_b a}$

Así que como dijimos que $y = log_a N$, tenemos finalmente que

$$Log_a N = \frac{log_b N}{log_b a}$$

que es la expresión que nos sirve para cambiar de un logaritmo de base b, a uno de base a.

Ejemplo 7.

Encontrar $log_7 257$

*Solución.*Lo que si conocemos (por medio de las tablas) es log 257. Así que la base conocida aquí es b = 10, y queremos obtener el logaritmo en base a = 7.
Entonces, usando la expresión anterior, se tiene que

$$log_7 257 = \frac{log_{10} 257}{log_{10} 7} = \frac{2.4099}{0.8450} = 2.8519$$

1.7. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Resolver una ecuación de este tipo es sencillo, aplicando las propiedades de los logaritmos aquí vistas.

Ejemplo 8.

Resuélvase la ecuación $6^{x+2} = 15^{2x}$

Aplicamos logaritmos comunes a ambos lados y tenemos:

$$log6^{x+2} = log15^{2x}$$

y por propiedades de logaritmos:

$$(x+2)log6 = 15xlog15$$

$$(x+2)(0.7781) = (2x)(1.1761)$$

Efectuando la multiplicación:

$$0.7781x + 1.5562 = 2.3522x$$

$$0.7781x - 2.3522x = -1.5562$$

$$x = 0.99$$

Ejemplo 9.

Encontrar el valor de x, que resuelve la ecuación logarítmica $log_2(x+8) - log_2 4 = 3$

*Solución.*Por propiedades de los logaritmos tenemos que

$$log_2\frac{(x+8)}{4} = 3$$

Y de la definición de logaritmo, esto significa

$$2^3 = \frac{(x+8)}{4}$$

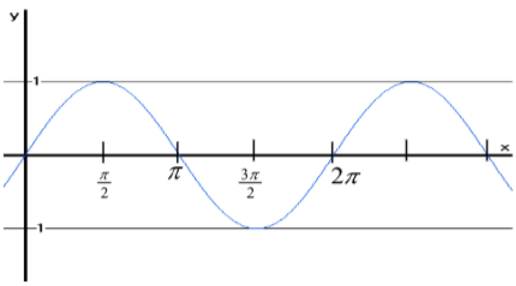
$$8 = \frac{x+8}{4}$$

Y despejando se obtiene $x = 24$

1.8. Ejercicios y problemas.

1. Observa las gráficas e indica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas escribiendo V o F.

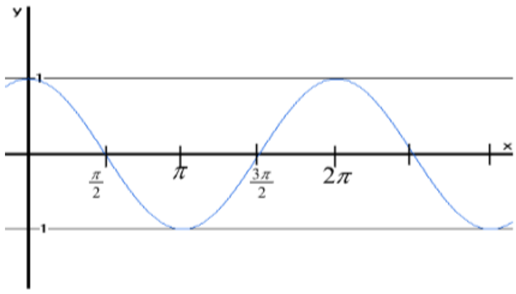
   a) $y = \sin x$



   1) El valor de sen x varía entre 0 y 2π
   2) El periodo de la función es igual a π
   3) La función es creciente en el intervalo $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$

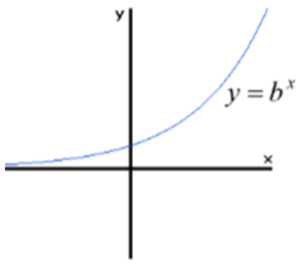
4) Interseca al eje horizontal en múltiplos enteros de π
5) Crece indefinidamente hacia la derecha.
6) Se prolonga indefinidamente.
7) El periodo de la función va de -1 a 1.

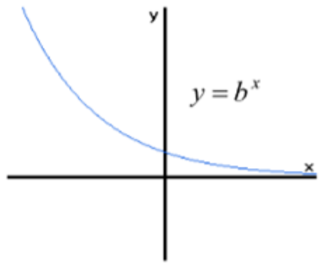
b) $y = \cos x$



1) El periodo de la función es 2π.
2) Los valores de la función van de $-\infty$ a ∞
3) Su periodo es igual a π
4) Crece de π a 2π
5) Crece de 0 a π
6) crece entre 0 y $\pi/2$
7) Decrece entre π y 2π

2. De acuerdo con las gráficas de la función exponencial, escribe F ó V si las afirmaciones siguientes acerca de la función son falsas o verdaderas.





a) Es periódica
b) Corta el eje X
c) Es positiva solo para $x > 0$.
d) Los valores de la función pueden ser negativos.
e) Si b ¡ 1 la función es creciente.
f) La función tiende a $-\infty$ cuando -1
g) $y = 1$ cuando $x = 0$ para toda $b \neq 0$
h) La función cruza el eje X para toda b.

3. Traza con ayuda de la computadora la gráfica de las siguientes funciones, encontrando raíces, asíntotas, dominio y rango en cada caso.

a) $g(x) = Acosx$; donde $A = 1/4, 1/2, 1, 2, -2$.
b) $y = \tan x$

4. Encuentra el valor de la razón en las siguientes progresiones.

a) $1, 1/5, 1/25, 1/125, ..$
b) $7, -28, 112, -448, ...$

c) $1/4, 1/6, 1/9, 1/27, 1/81, ...$

d) $1/5, 1/10, 1/20, ...$

e) $1/64, 1/16, 1/4, 1, ...$

5. Encuentra lo que se pida en cada caso.

   a) el valor del décimo término de la progresión $-1/3, 1/9, -1/27, 1/81, ...$

   b) La suma de los primeros 5 términos de la progresión $1/2, 1/4, 1/8, ...$

   c) El quinto término de la progresión $2, -6, 18, ...$

   d) El quinto término de la progresión geométrica $2/3, 4/9, 8/27, ...$

   e) En una progresión geométrica, el primer término es 150 y la razón es 1/2.
   Encontrar el octavo término.

   f) El primer término de una progresión geométrica es 162 y su razón es 3.
   Obtener la suma de los primeros 5 términos.

   g) Los dos primeros términos de una progresión geométrica son 99 y 297. ¿cuál es el tercer término?

   h) Una progresión geométrica tiene como primer término 1 y como razón 3. ¿cuál es la suma de los primeros siete términos?

   i) Hallar la suma de los primeros cuatro términos de la progresión geométrica definida por $f(x) = 3^{x-3}; x \in \mathbf{N}$

6. Escribe las expresiones siguientes en forma logarítmica.

   a) $x^{-5} = 1/y$

   b) $(1/5)^2 = 1/25$

   c) $x^p = y$

   d) $3^{-5} = 1/243$

   e) $x^{-n} = 1/y^2$

   f) $8^7 = y$

7. Escribe una expresión equivalente a cada una de estas empleando las propiedades de los logaritmos.

   a) $logA^N$

   b) $log_x \frac{R}{S}$

   c) $log_a MN$

   d) $log_a M^k$

8. Escribe Falso o Verdadero según corresponda a cada expresión.

   a) $log_a M^k = Mlog_a K$

   b) $log_a MN = log_a M + log_a N$

   c) $log_a(M + N) = log_a M + log_a N$

   d) $log_a(M - N) = log_a M - log_a N$

   e) $log_e x^3 = log_e(3x)$

   f) $log_e(3x) = log_e 3 + log_2 x$

   g) $log_e x^3 = 3 + log_e x$

   h) $log_e 3x = 3 - log_e x$

9. Encontrar los siguientes logaritmos comunes.

   a) $log_{10} 0.001$

   b) $log_{10} 0.000001$

   c) $log_{10} 0.00001$

10. Dado el logaritmo del número x, hallar el número x.

    a) $log_{10} x = 3.2971$

    b) $log_{10} x = 3.6744$

11. Efectuar las operaciones siguientes, usando logaritmos.

    a) $\sqrt[3]{54.44}$
    b) $\sqrt[4]{754.9}$
    c) $(\frac{291}{100})^{11}$
    d) $\sqrt[3]{195.3}$

12. Encontrar los siguientes logaritmos.

    a) $log_5 8$
    b) $log_{21} 7532$
    c) $log_{10} 19.75$

13. Halla el valor de x, que resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

    a) $log_3(x+1) + log_3(x-1) = 3$
    b) $log_2(x+8) - log_2(4) = 3$
    c) $log6^{x+2} = log15^{2x}$
    d) $log_{10}(4x^2-1) - log_{10}(2x1) = 1$