Cimientos Matemáticos

Módulo 19: Apéndices

Erick Paulí Pérez Contreras

Transcripción a LaTeX: Carlos Bello Cortés
Supervisión transcripción: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa 3»

1. Apendice 1. Ley de senos y cosenos.

Al resolver triángulos oblicuángulos, aplicaremos la ley de senos y la ley de cosenos.
Enunciaremos, sin demostrar, cada una de estas leyes.

Ley de senos.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c}$$

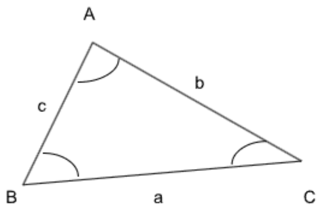
Ley de cosenos. Dados dos lados de un triángulo oblicuángulo y el ángulo comprendido entre ellos, obtenemos el tercer lado usando que:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos C}$$

$$c = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos B}$$

Aquí la notación usada para lados y ángulos de un triángulo es como se indica en la figura siguiente:



2. Apéndice 2. Interés compuesto.

Supongamos que se tiene cierto capital P, y se invierte a una tasa de interés anual r, que se mide como un porcentaje. Al cabo de un año el interés generado será Pr y el nuevo capital será de

$$A = P + Pr = P(1 + r)$$

Al cabo de un segundo año, el interés generado será esta vez $P(1 + r)r$, y sumado al capital anterior se contará con

$$A = P(1 + r) + P(1 + r)r$$

o sea

$$A = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$$

Similarmente se puede hacer ver que al cabo de n años, el capital con el que se contará será de:

$$A = P(1 + r)^2$$

Donde
P es el capital inicial.
n es el número de años.
A es el capital al cabo de n años
r es la tasa de interés anual.

Ejemplo

Gaby ha decidido invertir \$15000 a un 12 % de interés compuesto anual, para cuando salga de la universidad dentro de 4 años. ¿Qué monto tendrá Gaby al terminar su carrera?

Solución Aquí $P = 15000, n = 4, r = 0.12$
Así que, el capital que tendrá Gaby será: $A = 15000(1 + 0.12)^4 = 15000(1.12)^4 = 15000(1.5735) = 23602.79$

3. Apéndice 3. Números factoriales y coeficientes binomiales.

3.1. Números Factoriales.

En general, *el factorial* de un número natural n se define como el producto de los primeros n naturales:
Por ejemplo: ... no hay ejemplos

3.2. Coeficientes Binomiales.

Sea X un conjunto finito. Por ejemplo, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar en X? Veamos:
Si aparece el 1: 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5 Si aparece el 2: 2, 1, 2, 3, 2, 4, 2, 5 Si aparece el 3: 3, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 5 Si aparece el 4: 4, 1, 4, 2, 4, 3, 4, 5 Si aparece el 5: 5, 1, 5, 2, 5, 3, 5, 4

Como habrás observado, en el arreglo anterior estamos contando dos veces a cada pareja, por lo que el número total de parejas será:

De un conjunto de 5 elementos, estamos contando cuántos subconjuntos de tamaño 2 hay. Este es otro número importante y se llama coeficiente binomial de 5 en 2. Se denota por $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos que se pueden formar dentro de un conjunto con n elementos.

Los coeficientes binomiales se usan cuando queremos calcular combinaciones en las que:
1) No hay repetición de elementos. 2)No importa el orden de los elementos.

4. Apéndice 4. Definición clásica de probabilidad.

La probabilidad es una medida de la posibilidad de ocurrencia de un evento.

Llamamos evento a algo que fácilmente podemos determinar si ocurre o no ocurre, por ejemplo:
1) Lanzar una moneda al aire y que caiga sol.
2) Que llueva mañana en la tarde.
3) Lanzar dos dados y que al caer los puntos sumen 5.

Son ejemplos de eventos.
Cuando consideramos un evento, vamos a hablar de la posibilidad de que ocurra o no ese evento. Es diferente hablar de la posibilidad que de la probabilidad. Si bien, son conceptos relacionados se refiere a cosas diferentes. Si nos preguntamos si es posible que al lanzar dos dados obtengamos como resultado un 5, la respuesta es SI. Si nos preguntamos por la probabilidad, queremos además tener un número que mida de alguna manera esa posibilidad.

La probabilidad es entonces un número. Usualmente la medimos de 0 a 1, siendo 0 la probabilidad de un evento imposible y 1 la probabilidad de un evento seguro.

Si E es un evento, la probabilidad de que ocurra E es un número que va de 0 a 1 y se calcula:

Ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas el resultado sea A, A, A?
*Solución*Consideremos primero un evento más sencillo para entender qué está pasando: al lanzar una sola moneda, los resultados posibles son {A, S}. Entonces la probabilidad de que caiga A es 1/2.

Al lanzar dos monedas, los resultados posibles son: {AA, AS, SA, SS}. La probabilidad de que obtengamos AA es 1/4 .

Al lanzar tres monedas, los resultados posibles son: {AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS} por lo que la probabilidad de obtener AAA es 1/8 ya que tenemos un resultado favorable de un total de 8 resultados posibles.

Como vemos, para calcular la probabilidad, necesitamos primero saber cuántos resultados posibles existen, para lo cual necesitamos los principios básicos de conteo. En cada lanzamiento tenemos 2 resultados posibles, por lo que al ser tres lanzamientos el número de resultados posibles es:

5. Apéndice 5. Espacio Muestra y eventos combinados.

En probabilidad, llamaremos espacio muestra al conjunto de todos los resultados posibles de una situación. Generalmente lo denotaremos con la letra S. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el espacio muestra es S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. En el lanzamiento de una moneda, el espacio muestra es S = {a, s}. Como hemos visto, en una situación podemos estudiar diversos eventos. Vamos a llamar evento simplemente a un subconjunto del espacio muestra.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, tenemos los siguientes eventos: A = {caer número par}, B = {caer número impar}

Aquí hemos descrito a los eventos A y B simplemente con un enunciado entre llaves.
Podemos también enumerar a sus elementos:
A = {2, 4, 6}, B = {1, 3, 5}

Definición

Dos conjuntos A y B se llaman disjuntos si no tienen ningún elemento en común.

Partimos del espacio muestra S. Dos eventos A y B son dos subconjuntos de S. Decimos que A y B son mutuamente excluyentes si no tienen ningún elemento en común. En otras palabras A y B son disjuntos.
Por ejemplo sean S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10}, A = {números pares} y B = {números impares}. Los eventos A y B son mutuamente excluyentes, pues no hay ningún elemento en común.
Cuando calculamos la probabilidad de una disyunción se usa la siguiente fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo. Se tienen 10 tarjetas numeradas del 1 al 10 y se escoge una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo ó par?

Solución: Como ya analizamos arriba, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {2, 3, 5, 7} y B = {2, 4, 6, 8, 10}. Entonces,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$