Lista de ejercicios de práctica

Unidad 1: El plano y el espacio cartesiano.
Geometría Analítica I

Facultad de Ciencias
Profesor: Arilín Haro. Ejercicios seleccionados por: Antonio Romero y Álvaro Cruz.

Instrucciones

Sip, tal como te lo andas sospechando. La recomendación es leer con cuidado y tratar de resolver cada ejercicio según vayas viendo el material de cada tema. ¡Éxito!

1. El plano cartesiano: Sus coordenadas y lugares geométricos.

1. Supongamos un protón fijo que tiene un electrón a una distancia aproximada de 0.5 armstrongs. Si siempre mantiene esta distancia, y el electrón se mueve libremente en un plano, ¿Qué lugar geométrico describe la trayectoria del electrón?

2. Describe los lugares geométricos descritos por:

   a) $A = \{(x, y) \mid x < y + 1\}$
   b) $B = \{(x, y) \mid x \geq -2y + \pi\}$
   c) $C = \{(x, y) \mid -3x + 2 > 0\}$
   d) $D = \{(x, y) \mid -\frac{1}{2}x + 1 < y - 2\}$
   e) $E = \{(x, y) \mid x > -\frac{2}{3}y + 2\}$
   f) $F = \{(x, y) \mid |x| < a;\ \ a > 0\}$
   g) $G = \{(x, y) \mid |x| > a;\ \ a > 0\}$
   h) ¿Qué pasaría si en F y G el parámetro a fuese negativo?

3. Un granjero quiere construir una cerca. Al pedir su madera, le preguntan de las medidas de la valla, y decide hacerle el día imposible al vendedor, diciéndole: "Mi cerca obedece a la ecuación $|x| + |y| - 1 = 0$". Determinar:

   a) Intersecciones con el eje de las abscisas.
   b) Intersecciones con el eje de las ordenadas.
   c) Área que delimita la cerca.

4. Se localizó un asteroide vagando en una región del espacio, sin embargo, los satélites no pudieron dar con su ubicación exacta debido a interferencias de campo magnético. Si con x se designa al asteroide, y los astrónomos sólo saben que x cumple que $x^2 - x - 6 > 0$. ¿En qué región se pierde contacto con el asteroide?

5. Un electrón s viaja a lo largo de una órbita, pero al tratar de localizarlo, no fue posible, pues ya tenían datos muy aproximados de su momento, sólo saben que está en el conjunto solución de $1 - 2s - s^2 > 0$.

   a) ¿Cuál es ese conjunto?

   b) ¿Por qué no se puede obtener datos más certeros de su posición?

2. El espacio cartesiano: Sus coordenadas y lugares geométricos.

1. Escribir y dibujar el lugar geométrico que describe:

   a) Los aristas de un cubo de 2 cm cada lado cuyo centro esta en el origen.

   b) Los puntos en el interior del mismo cubo (excluyendo los aristas).

   c) Los puntos en el exterior del mismo cubo (incluyendo los aristas).

2. Una partícula cargada con velocidad es sometida a un campo magnético uniforme. Su trayectoria es una hélice y al realizar varios experimentos, cambiando la intensidad del campo magnético y velocidad, se encuentra que cualquier partícula es encontrada en la región cuyos puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 \leq 1$. Si la dirección del campo magnético es paralela a la dirección de avance de la hélice. ¿Qué eje de coordenadas es paralelo al campo magnético?

3. ¿Qué característica debe satisfacer las coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^3$ a uno de los planos coordenados? ¿Y sobre los ejes coordenados?

4. Un asteroide viaja en el espacio cuya trayectoria esta modelada sobre el plano dado por la expresión $x + y + z = 1$. Tres objetos se encuentran en las posiciones A=(1,-2,1), B= (1,0,-2) y C= (1,1,1) en unidades arbitrarias. ¿Con qué objeto impactará el asteroide? Dibuje la posición de los objetos y la trayectoria del asteroide.

5. Dibuja y escribe el lugar geométrico definido por los puntos que están:

   a) Por arriba del plano XY.

   b) En el plano XY.

   c) Por debajo del plano XY.

   d) Por atrás del plano YZ.

3. Subconjuntos del plano y el espacio cartesiano.

1. A partir de los siguientes subconjuntos:

   a) $A = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$
   b) $B = \{(x, y) \mid x^2 < 1\}$
   c) $C = \{(x, y) \mid xy \leq 1\}$
   d) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

   Dibuja separadamente las regiones que comprenden:

   a) $A = B$
   b) $B \cup C$
   c) $C \cap D$
   d) $D - \overline{A}$

2. Se sabe que la partícula "A" puede ser encontrada en los puntos del plano $\{(x, y) \mid x+ y > 3\}$, mientras que la partícula "B"puede ser encontrada en la puntos $\{(x, y) \mid x+ y < -1\}$. ¿Existe algún punto del plano donde ambas partículas tengan la misma posición? Si es así, escríbalo.

3. Dibujar la región cuyos puntos son solución simultánea al siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x + y < 3 \\ x + 2y > 3 \end{cases} \tag{1}$$

   ¿Existe alguna cota inferior en esta región?

4. Un terreno cubre una región dada por ecuación $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. ¿Qué forma geométrica tiene el terreno? Obtenga el área del terreno en unidades arbitrarias. (Para ver la forma del terreno, puede usarse GeoGebra.)

5. A partir de los siguientes subconjuntos de puntos en el espacio:

   a) $R = \{(x, y, z) \mid y > 3\}$
   b) $S = \{(x, y, z) \mid z^2 > 4\}$
   c) $T = \{(x, y, z) \mid xz \geq 0\}$
   d) $v = \{(x, y, z) \mid y - z \leq 0\}$

   Escriba el complemento de cada subconjunto y dibuje sus gráficas.

4. Distancia.

1. Demostrar que los puntos (2,1),(4,0) y (5,7) son vértices de un triángulo rectángulo.

2. El mariscal de campo campo de un equipo de fútbol americano lanza un pase desde la línea de la yarda 28, a 40 yardas de la línea de banda. El pase es atrapado por otro jugador en la línea de la yarda 5, a 20 yardas de la misma línea de base. ¿Cual es la longitud del pase?

3. Demostrar que $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ es el punto medio de los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Realizar la misma demostración para cualesquiera 2 puntos en $\mathbb{R}^3$.

4. Tres partículas (A,B,C) se encuentran en las posiciones A=(2,3), B=(4,9), C=(-2,7). ¿Qué par de partículas están más cercanas entre sí?

5. Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A=(1, 0, 0) y B=(0, 1, 0). Las coordenadas del centro son M=(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los otros vértices.

5. Simetrías.

1. Determinar cuales simetrías posee cada unos de los subconjuntos cuyos puntos satisfacen cada ecuación a continuación:

   a) $x = y$
   b) $x = y^2$
   c) $x^2 + y^2 = 1$
   d) $x = z$
   e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2. ¿Qué tipo de simetría tiene el conjunto de puntos que cumple la relación xy-y-x-2=0? Encuentre los ejes simétricos. Hint: despejar alguna variable.

3. Demuestre que cualquier figura $A \subset \mathbb{R}^2$ que tenga 2 de las simetrías (respecto al eje X, Y o al origen), también tiene la tercera.

4. Dibuje la región cuyos puntos (x,y) son tales que $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. ¿Qué tipo de simetría cumplen los puntos en su frontera?

5. ¿Cuales simetrías poseen: una circunferencia, un rectángulo y un triangulo isósceles?

6. Gráficas de funciones.

1. Para cada x en $\mathbb{R}$, sea n el único entero tal que $n \leq x < n+1$, y sea $f(x) = n$. Esta función es llamada "el entero más grande" y es denotado por $rf(x) = [x]$. Por ejemplo, $f[-0{,}1] = -1$, $f[\frac{5}{2}] = 2$, $f[-\frac{5}{2}] = -3$. Esta función es usada en sistemas electrónicos, como detectores, al cuantificar pulsos de energía. Hacer la gráfica de la función para $-6 \leq x \leq 6$.

2. En ciertos problemas de electrónica, se tiene un capacitor que resta carga (en forma de $[x]$) a un inductor que se carga de acuerdo a x, por lo que, para modelar este sistema electrónico, la función que se emplea es $f(x) = x - [x]$. A esta función se le llama "la parte fraccionaria de x".

   a) Evaluar f para $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{4}$.

   b) ¿Entre qué y qué valor(es) caen los valores de la función?

   c) Grafica la función para $-5 \leq x \leq 5$.

3. La aceleración de la gravedad hace que los objetos que caen tengan un cambio ascendente en su velocidad. De acuerdo a las ecuaciones de cinemática, designamos a la posición con x, al tiempo con t, la aceleración de la gravedad como g y a las velocidades inicial y final como v_0 y v_f, respectivamente.
   Si una persona **deja caer** una sandía desde un edificio muy alto, onbtener, usando las ecuaciones:
   $$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \& \quad v_f^2 = v_0^2 + 2gx$$

   a) La posición cuando la sandía lleva 1, 2, 3, 4 y 5 segundos cayendo.

   b) La velocidad en los segundos 1, 2, 3, 4 y 5.

   c) En el caso en que se le de una **velocidad inicial de** $1{,}5 m/s$ a la sandía, ¿Cuál sería su posición en los segundos del 1 al 10?

   d) En el mismo caso del subinciso anterior, ¿Cuál sería su velocidad en los segundos del 1 al 10?

   e) ¿En cuál(es) caso(s) anterior(es) dirías que las ordenadas llevan una proporcionalidad directa con las abscisas? ... ¿Quién avienta sandías desde un edificio hoy en día? Pfff...

4. La ecuación de estado de un gas ideal, en la teoría cinética molecular, está dada por:
   $$PV = N\kappa_B T$$
   Donde P es la presión, V es el volumen que el gas ocupa, N es el número de moléculas del gas, κ_B es la constante de Boltzmann con valor de $1{,}38 \times 10^{23} J/K$, y T es la temperatura del sistema.

Si se supone un sistema físico ideal en que ninguna otra variable se involucre (aparte de las ya mencionadas), suponiendo que se tienen 1×10^{21} moléculas y que tenemos una temperatura de $287^{\text{o}}K$, calcular:

a) Graficar la función para el intervalo $-3 \leq x \leq 3$.

b) La presión a volúmenes cercanas a 0 (dar 3 medidas del orden de mililitros).

c) La presión a volúmenes grandes (3 del orden de megalitros).

d) ¿Qué pasa cuando el volumen es 0?

e) ¿Es posible despejar V? ¿Cuál sería su expresión?