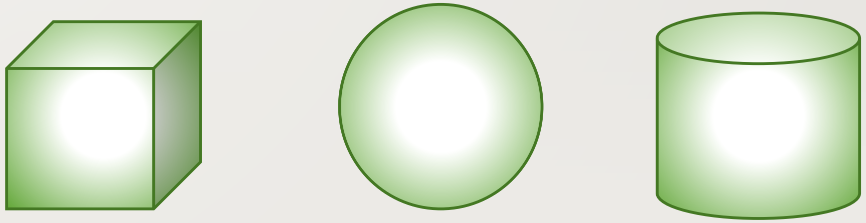
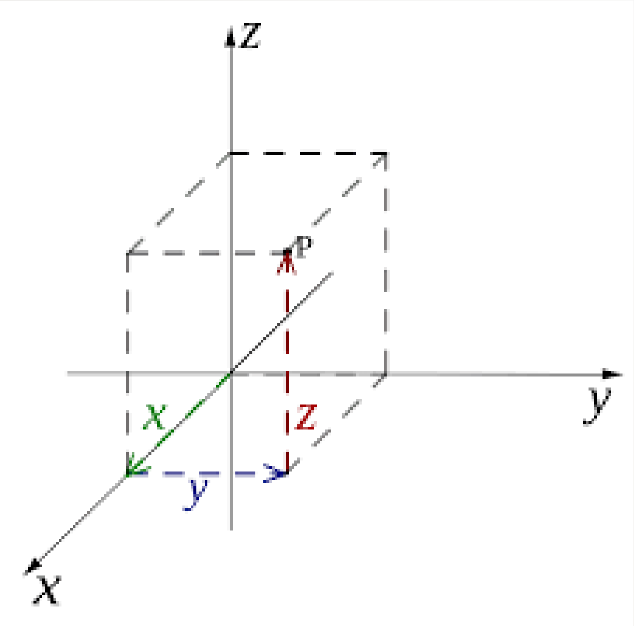
Sistemas de coordenadas en el espacio

COORDENADAS RECTANGULARES, ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS.

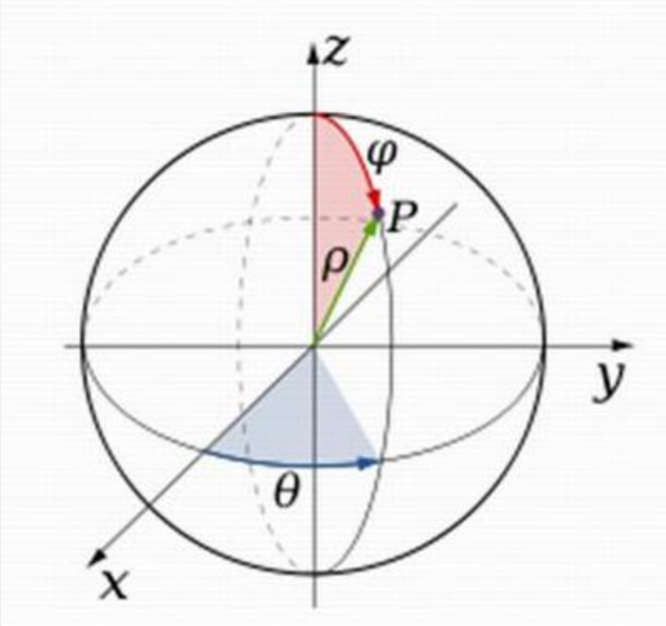


¿Cómo se ven?

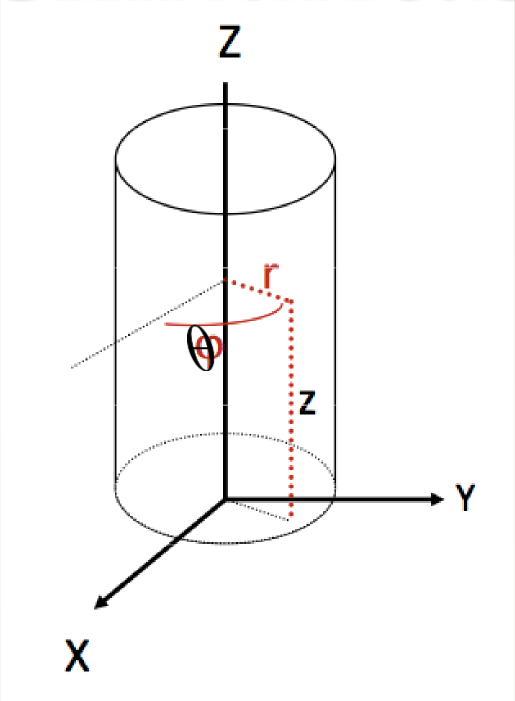
Rectangulares



Esféricas



Cilíndricas



Ejercicios:

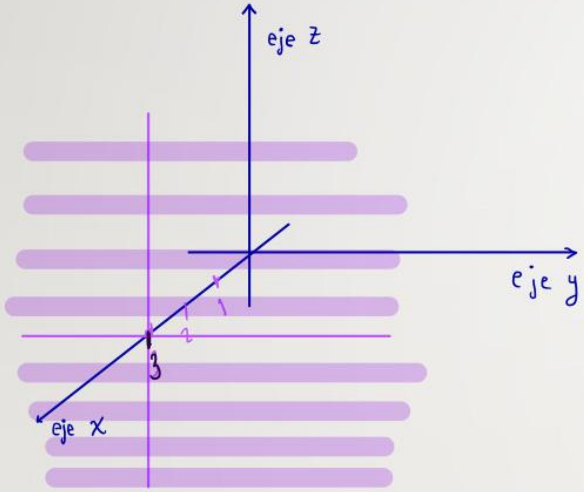
Ok, ok, empecemos por ver como se ven los lugares geométricos al “fijar una variable” en cada sistema.

Rectangulares (o cartesianas)

$x = 3$ $y = 5$ $z = -2$

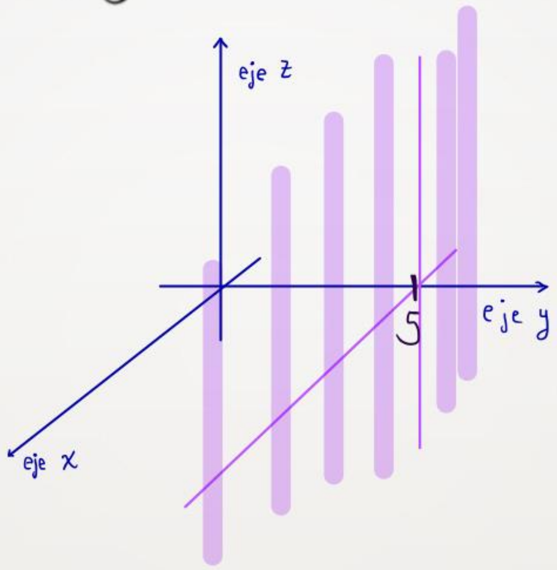
Rectangulares (o cartesianas)

$x = 3$



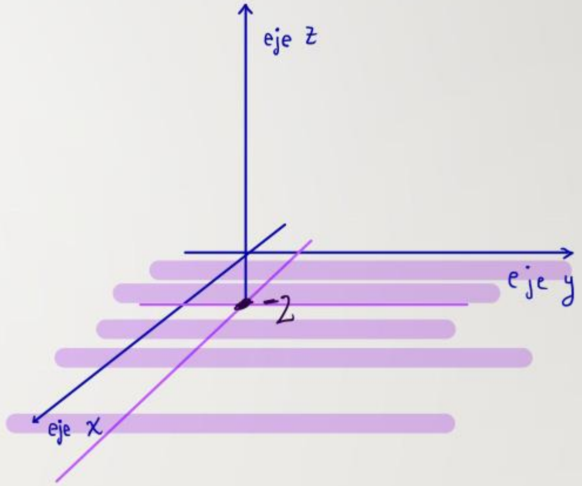
Plano que pasa por x=3
y es paralelo al plano yx

$y = 5$



Plano que pasa por y=5 y es
paralelo al plano xz

$z = -2$



Plano que pasa por z=-2
y es paralelo al plano yx

Esféricas

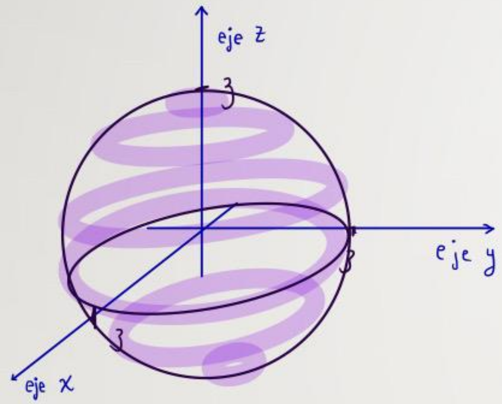
$\rho = 3$

$\theta = 1$

$\phi = 3$

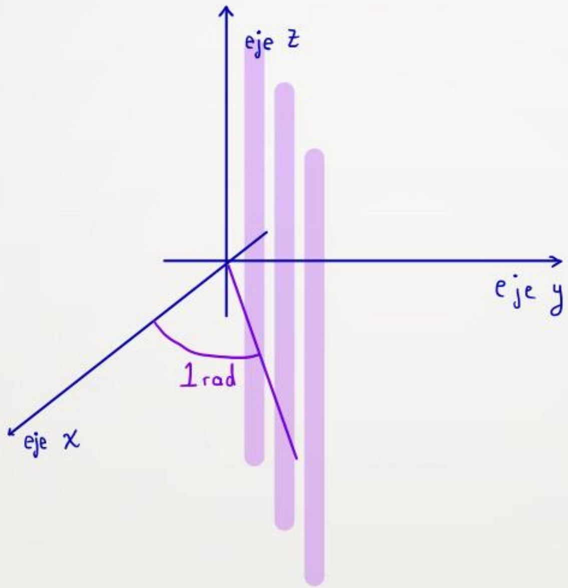
Esféricas

$\rho = 3$



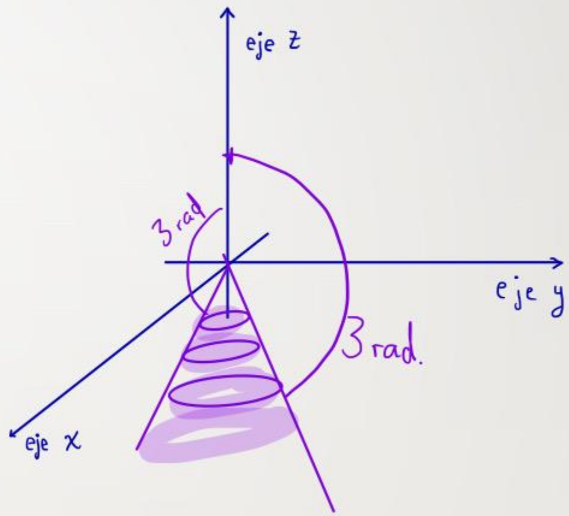
Esfera centrada en el origen y con radio 3

$\theta = 1$



Semiplano que pasa por θ =1 y es perpendicular al plano yx

$\phi = 3$



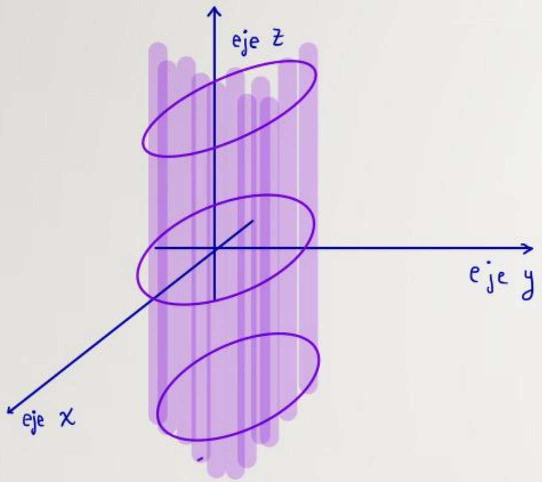
Cono que resulta de girar respecto al eje z 'un rayo' con ϕ =3

Cilíndricas

$r = 3$ $\theta = 1$ $z = 3$

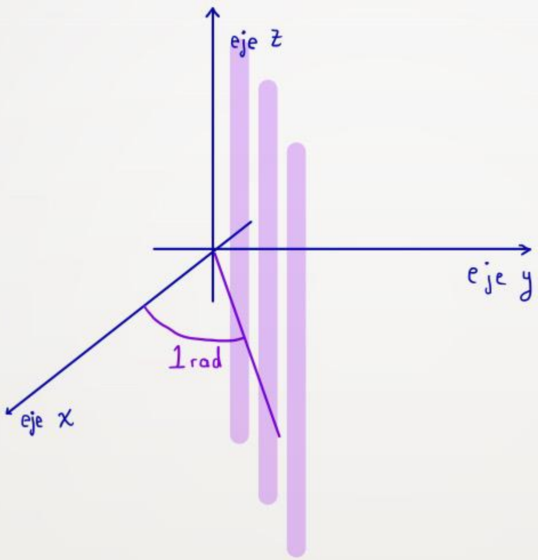
Cilíndricas

$$r = 3$$



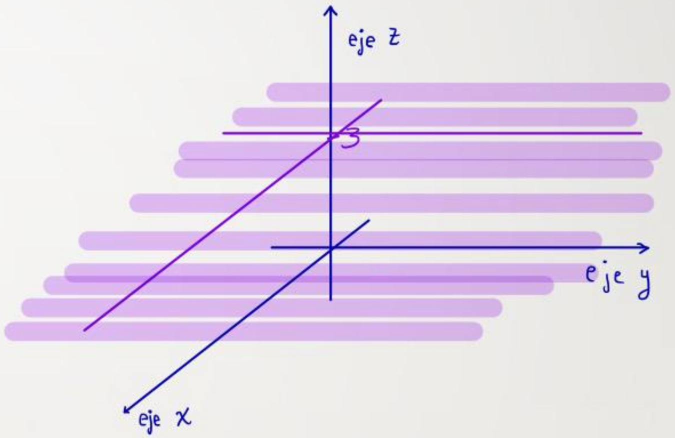
Cilindro de radio 3 que es paralelo al eje z

$$\theta = 1$$



Semiplano que pasa por $\theta = 1$ y es perpendicular al plano yx

$$z = 3$$



Plano que pasa por z=3 y es paralelo al plano yx

¿Cómo pasar de unas a otras?

Si las coordenadas cartesianas de un punto P son (x, y, z), entonces sus coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
\theta &= \text{ang tan } \frac{y}{x}, \\
\phi &= \text{ang cos } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},
\end{aligned}$$

entonces sus coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta \,\text{sen}\,\phi, \\
y &= \rho \,\text{sen}\,\theta \,\text{sen}\,\phi, \\
z &= \rho \cos\phi.
\end{aligned}$$

P de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) tiene coordenadas cartesianas

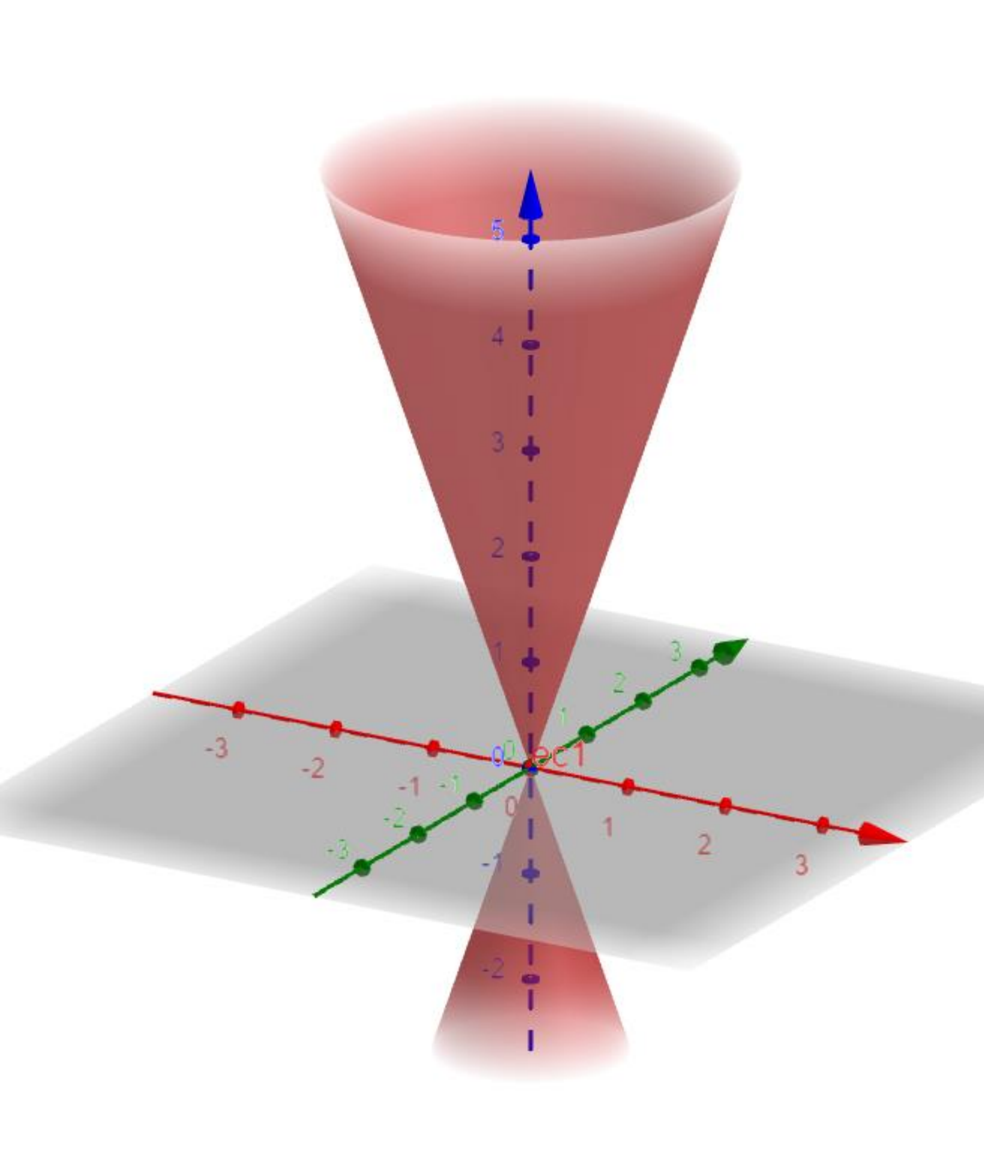
$$\begin{aligned}
x &= r \cos\theta, \\
y &= r \,\text{sen}\,\theta, \\
z &= z.
\end{aligned}$$

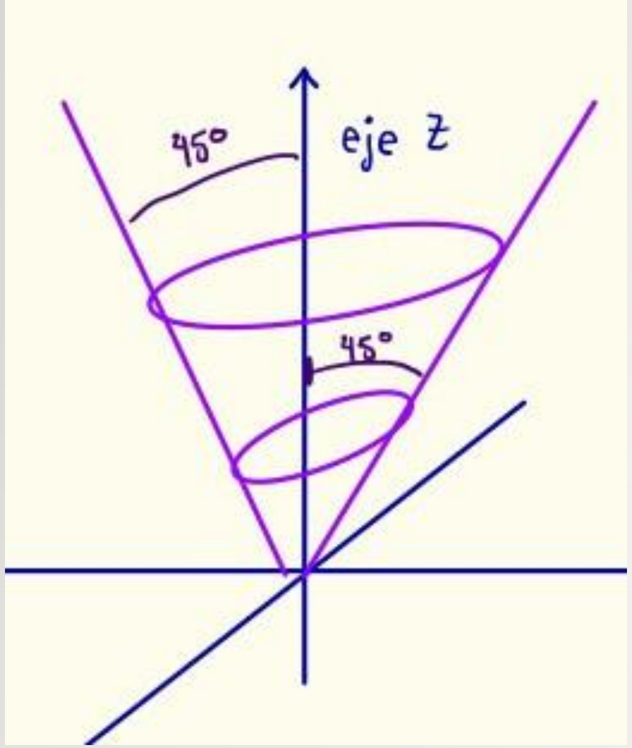
Recíprocamente, si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y, z) del punto P, sus coordenadas cilíndricas son (compare con el caso esférico):

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
\theta &= \text{ang tan } (y/x), \\
z &= z.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular

Las ecuaciones del cono





Esféricas

De acuerdo con las coordenadas esfericas notamos que el ángulo que se da en el dibujo coincide con la 3er coordenada esférica. Por lo tanto el lugar geométrico del cono se puede representar con $\phi = 45°$

Cartesianas

Sabemos que $\phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, o bien $\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Luego, como la ecuación del cono es $\theta = 45°$ obtengo $\cos 45° = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ de aquí $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ elevando al cuadrado queda $\frac{2}{4} = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$ lo que implica $\frac{1}{2} = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$, luego $x^2+y^2+z^2 = 2z^2$ lo que me deja con $x^2+y^2=z^2$. Por lo tanto la ecuación del cono es:

$x^2+y^2=z^2$ con $z \geq 0$

Cilíndricas

Usaremos la ecuación $x^2+y^2=z^2$ y sustituiremos los valores de x, y y z con los de coordenadas cilíndricas.

Recordamos que $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{Sen}\theta$ y $z=z$. Sustituyendo obtengo

$(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{Sen}\theta)^2 = z^2$ lo que implica $r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{Sen}^2\theta = z^2$;

luego $r^2(\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta) = z^2$, pero como $\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta = 1$

obtengo $r^2 = z^2$ o bien $|x| = |z|$. Aquí de nuevo ocupo la condición $z \geq 0$. Luego como $r>0$ se puede simplificar la ecuacion a $r=z$

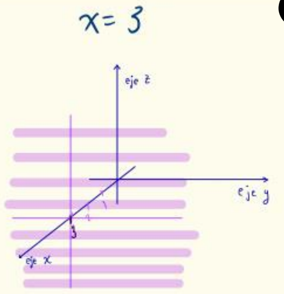
Podemos representar el cono del dibujo de las siguientes maneras

- $\{(\rho, \theta, \phi) \mid \phi = 45°\}$
- $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=z^2$ y $z \geq 0\}$
- $\{(r, \theta, z) \mid r = z\}$

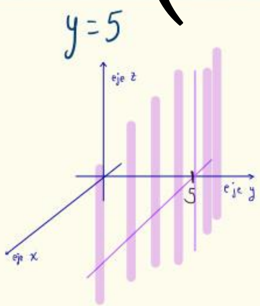
Para nuestro siguiente acto…

- ¿Cómo se ven las coordenadas en ciertos lugares geométricos?
- ¿Que resulta de fijar dos variables y dejar a la 3era libre por la vida?

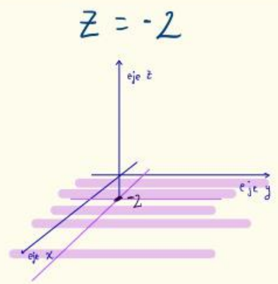
Rectangulares (o cartesianas)



Plano que pasa por x=3
y es paralelo al plano yx

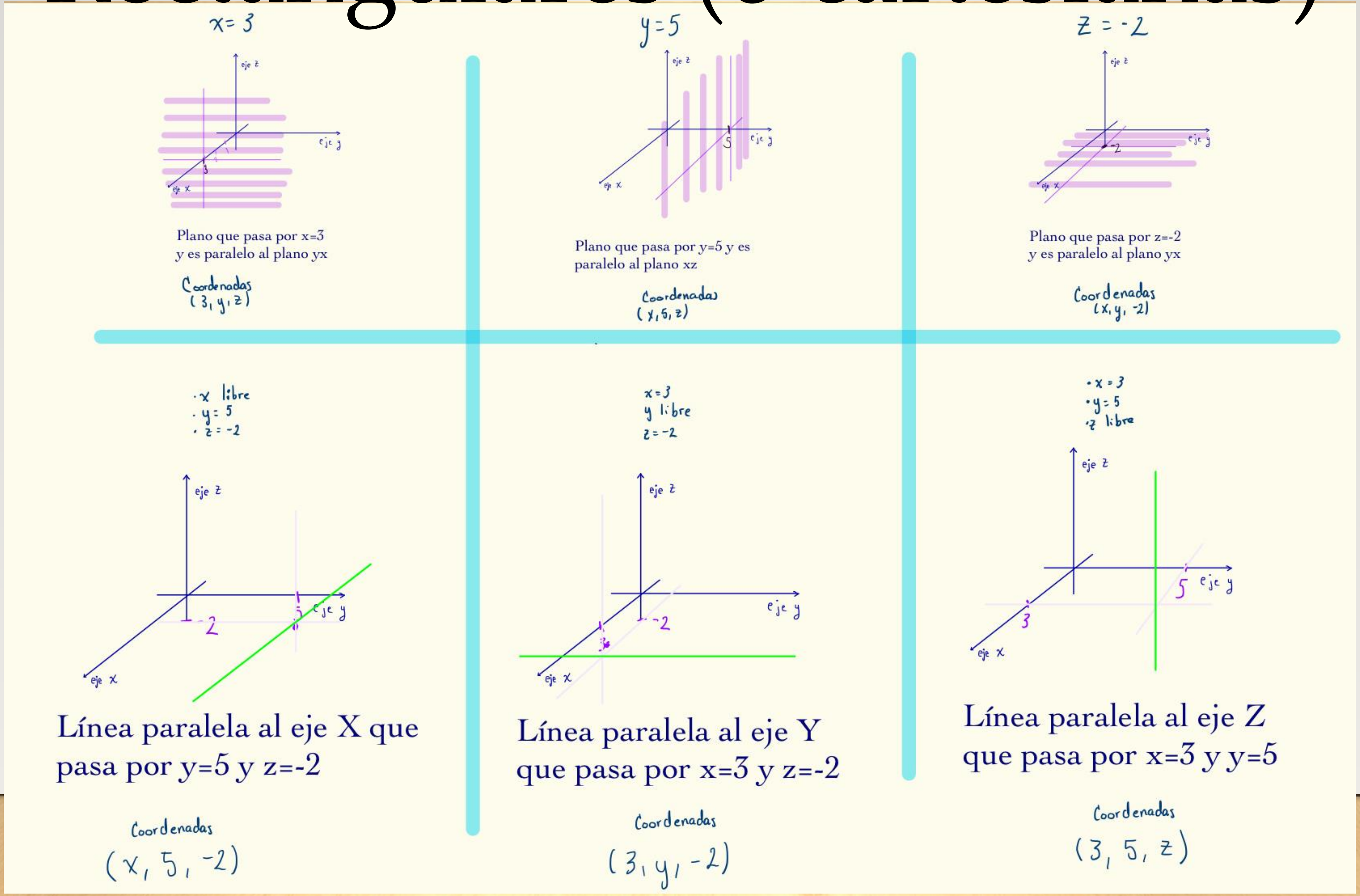


Plano que pasa por y=5 y es
paralelo al plano xz



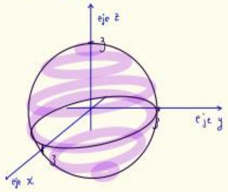
Plano que pasa por z=-2
y es paralelo al plano yx

Rectangulares (o cartesianas)



Esféricas

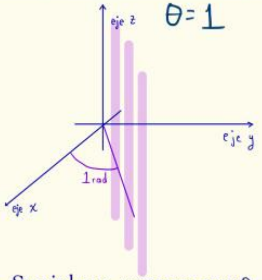
$P=3$



Esfera centrada en el origen y con radio 3

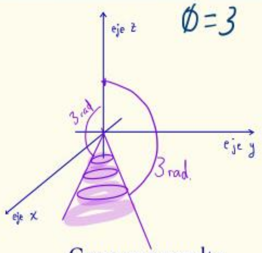
Coordenadas

$\theta=1$



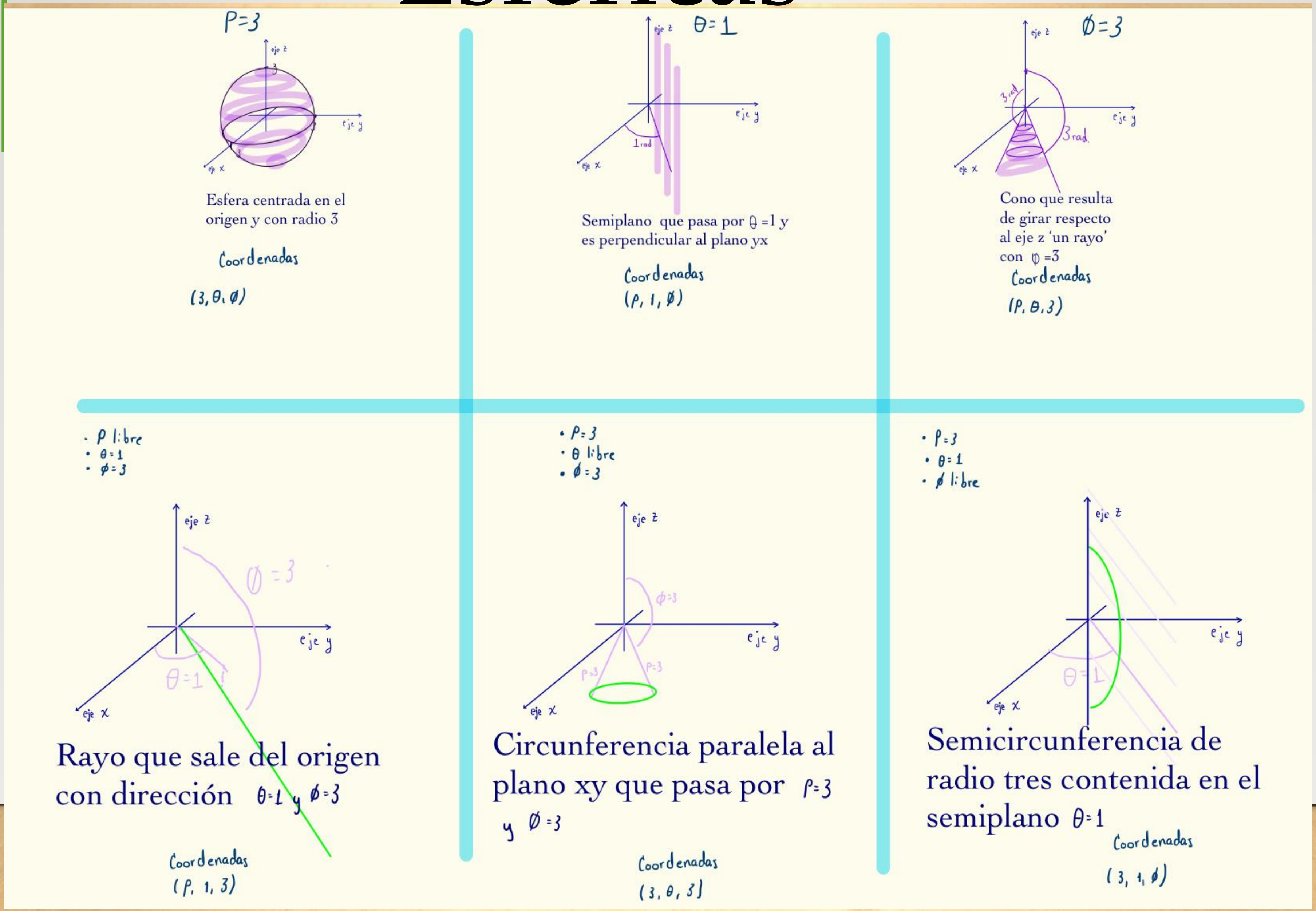
Semiplano que pasa por $\theta=1$ y es perpendicular al plano yx

$\phi=3$



Cono que resulta de girar respecto al eje z 'un rayo' con $\phi=3$

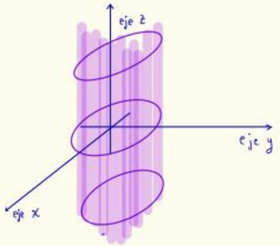
Esféricas



P=3
eje z
eje y
eje x
Esfera centrada en el origen y con radio 3
Coordenadas
(3, θ, ∅)
θ=1
1 rad
Semiplano que pasa por θ =1 y es perpendicular al plano yx
Coordenadas
(ρ, 1, ∅)
∅=3
3 rad
Cono que resulta de girar respecto al eje z 'un rayo' con ∅ =3
Coordenadas
(ρ, θ, 3)
· ρ libre
· θ=1
· ∅=3
∅ =3
θ=1
Rayo que sale del origen con dirección θ=1 y ∅=3
Coordenadas
(ρ, 1, 3)
· ρ=3
· θ libre
· ∅=3
∅=3
ρ=3
Circunferencia paralela al plano xy que pasa por ρ=3 y ∅ =3
Coordenadas
(3, θ, 3)
· ρ=3
· θ=1
· ∅ libre
θ=1
Semicircunferencia de radio tres contenida en el semiplano θ=1
Coordenadas
(3, 1, ∅)

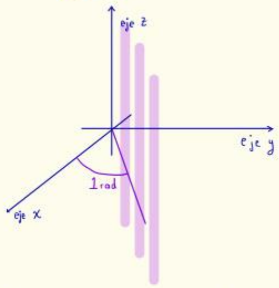
Cilíndricas

$r = 3$



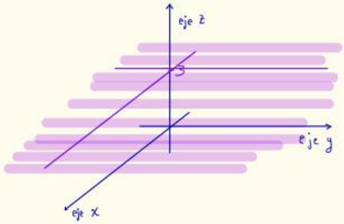
Cilindro de radio 3 que es paralelo al eje z

$\theta = 1$



Semiplano que pasa por $\theta = 1$ y es perpendicular al plano yx

$z = 3$



Plano que pasa por z=3 y es paralelo al plano yx

Cilíndricas