Lista de ejercicios de práctica

Unidad 2:
Trigonometría y más sistemas de coordenadas.

Geometría Analítica I
Facultad de Ciencias

Ejercicios seleccionados por Antonio Romero, Álvaro Cruz y Nidia Gómez.
Profesor: Arilín Haro.

Instrucciones

Sip, tal como te lo andas sospechando. La recomendación es leer con cuidado y tratar de resolver cada ejercicio según vayas viendo el material de cada tema. ¡Éxito!

1. Trigonometría (triángulos rectos).

1. Tres satélites se ubican en los vértices de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$. Los dos satélites más lejanos están separados por $30m$. A una hora del día, la proyección del satélite sobre la hipotenusa forma una recta que parte al triángulo en dos triángulos rectángulos. La distancia de ese satélite a la recta que une a los dos satélites más separados es de $10.8cm$. Hallar la medida de los dos catetos.

2. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 m. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

3. Dos átomos se encuentran separados a una distancia de $405.6m$, y un tercer átomo forma un cateto de manera que la proyección sobre la distancia entre los dos primeros átomos es de $60m$. Calcular los catetos y la altura relativa a la hipotenusa.

4. Calcular los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la proyección de uno de los catetos sobre la hipotenusa es $6cm$ y la altura relativa de la misma es de $\sqrt{24}cm$.

5. Una escalera de $10m$ de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera está a $6m$ de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

6. Consideremos un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de $12cm$ de lado.

   a) Determinar la medida de los lados del triángulo.

   b) ¿Son iguales sus áreas?

7. El primer agujero en el pecho de Tony Stark era una circunferencia que tenía una medida de $6cm$ de radio. Su primer núcleo consistía de alambres en forma de una circunferencia con un triángulo equilátero inscrito en esa circunferencia. ¿Cuál es el área de ese triángulo equilátero?

8. Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud $18.84cm$.

9. En una tarjeta madre cuadrada de $2cm$ de lado se inscribe un chip circular y en este chip otro chip cuadrado y en este un círculo de platino, pero se necesita oro para fijar estos dos últimos, entonces se aplica oro en el último cuadrado, que pega ese círculo de platino, peor hay que remover el oro sobrante. Hallar el área del oro sobrante comprendido entre el último chip cuadrado y el círculo de platino.

10. En una operación de cráneo de elefante, se modela el cráneo como una circunferencia, y se hace un injerto a $7cm$ del centro del cráneo. Este injerto tiene una longitud de $48cm$. Sabiendo esto, se desea calcular el área de la circunferencia con la que es modelado el cráneo del elefante.

11. Consideremos la identidad trigonométrica:

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

   a) ¿Qué se obtiene si se divide esa ecuación entre $sin^2(\theta)$?

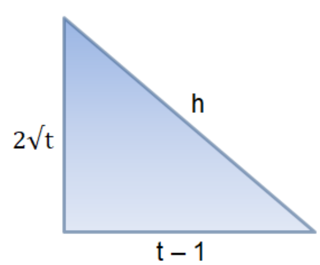
   b) ¿Y qué se obtiene si se divide entre $cos^2(\theta)$?

12. Con una escalera de 6 m se desea subir al extremo de una barda de 4 m de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?

13. Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 + cos2x}{ctgx} = sen2x$$

14. Encuentra el valor de h.



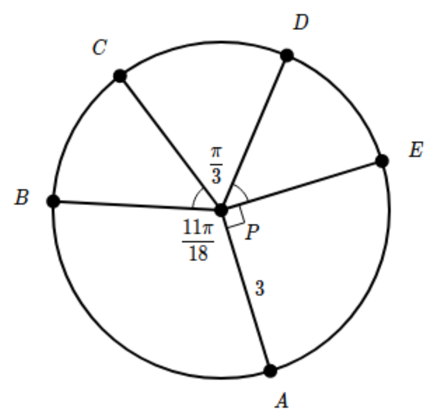
15. Demuestra la siguiente igualdad.

$$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$$

2. Radián.

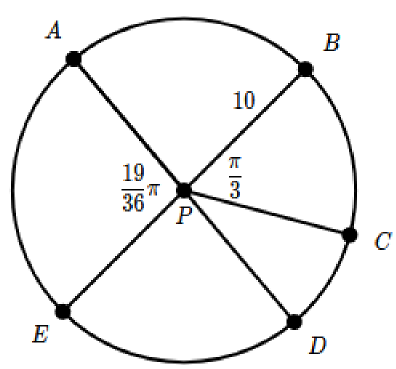
1. En un futuro cercano, los físicos aprenderán que en la mecánica angular, el radio y el ángulo son proporcionales. Usar esta relación para determinar el segmento de arco que recorre una pelota que está sujeta a una cuerda de $25cm$ de longitud por un ángulo de $\frac{3}{10}\pi$.

2. Un sincrotrón es un acelerador circular de partículas que tiene ubicadas lentes magnéticas que fijan el haz de partículas que viaja a través de él. Un esquema sería el siguiente:



   Si el haz de luz entra por D y sale por C en sentido dextrógiro. Si el radio del sincrotrón es de $3m$ y el ángulo entre D y C es de $\pi/3$, determinar la longitud de la trayectoria que recorre el haz de luz de D a C.

3. En la figura 3, si $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son diámetros de la circunferencia, y la longitud de $\overline{PB}$ es de $10cm$.



4. Demuestra que para una circunferencia de radio r, el área A de un sector circular con un ángulo central θ (en radianes) esta dado por:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \tag{1}$$

5. Un aspersor en un campo de golf riega agua a una distancia de 70 metros y gira a un ángulo de $120°$. Calcule el área de la región regada por el aspersor.

6. Sobre un círculo de $4cm$ de radio se traza un ángulo central de $\pi/3\ rad$. Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.

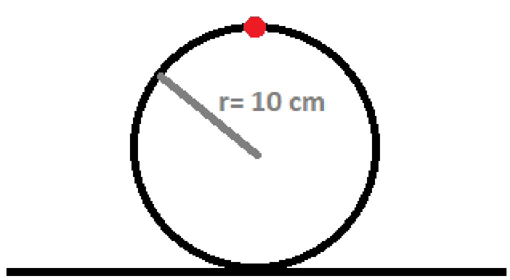
7. Una circunferencia tiene un radio de 4 pulgadas. Encuentre la la longitud de arco intersectado por un ángulo central de 240^o.

8. La velocidad lineal v de una partícula mide que tan rápido se mueve una partícula sobre una longitud de arco s en un tiempo t. Éste parámetro se define como $v = s/t$. Por otro lado, la velocidad angular ω de una partícula es el cociente del ángulo central (θ en radianes) y el tiempo. Suponga que las palas de una turbina de viento miden 116 pies de largo, y la hélice gira a 15 revoluciones por minuto.

    a) Calcula la rapidez angular de la hélice en radianes por minuto.

    b) Encuentre la rapidez lineal de las puntas de las palas.

9. Una llanta tiene un radio exterior de $10cm$. Se pinta una pequeña marca en la parte superior de la llanta (véase Figura inferior), y luego la llanta se rueda ligeramente hacia adelante para que la marca gire en un ángulo de $\pi/4$ radianes. ¿A qué distancia del suelo está la marca en este punto?



10. Demuestra que el radian es un ángulo constante. 🤯

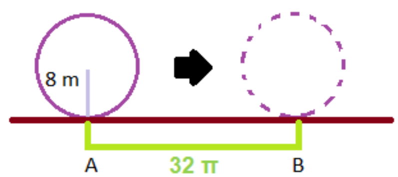
11. Asumiendo que Mercurio tiene una órbita circular y sabiendo que está a 36 millones de millas del Sol:

a) En un día terrestre, Mercurio completa sólo 0.0114 de su rotación total. ¿Cuántas millas recorrió en un día?

b) Usando la respuesta del inciso anterior, determina la medida angular del movimiento mercuriano en un día (en radianes).

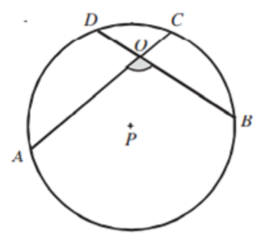
12. Una circunferencia tiene una longitud de 5π cm. ¿Qué longitud mide el arco de circunferencia asociado a un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes?

13. De la siguiente gráfica, calcula el ángulo que barre la rueda al trasladarse de la posición A, a la posición B.

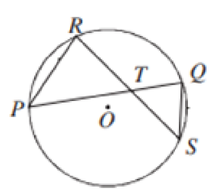


14. Determina la medida del ángulo $\angle AOB$ si el arco $\widehat{AB} = 160^o$ y $\widehat{CD} = 50^o$

    Puedes apoyarte en la siguiente figura.



15. Con ayuda de la siguiente figura, encuentra $\overline{PT}$ $\overline{TQ} = 5$, $\overline{RT} = 9$ y $\overline{TS} = 6$



3. Resolución de triángulos rectos.

1. Consideremos un radio r y un ángulo θ que hace este radio con respecto al eje X positivo.

    a) ¿Hay alguna manera de obtener la medida de los catetos?

    b) ¿Qué pasa si a θ se le suma un ángulo de 2π?

    c) Si el ángulo se midiera desde el eje Y positivo, ¿Aún habría manera de obtener los catetos?

2. Al inclinarse a 50º respecto al eje Y, la sombra de Michael Jackson mide $134.05cm$.

    a) Obtener el ángulo que hace respecto a la horizontal y pasarlo a radianes.

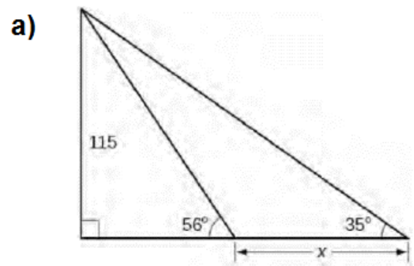
    b) Obtener la altura de Michael Jackson.

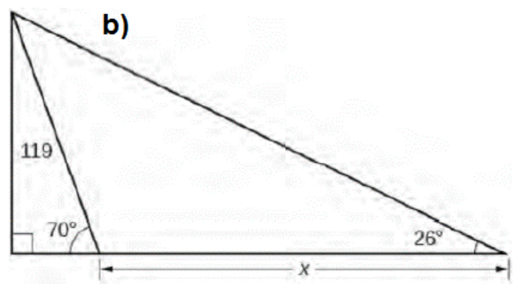
3. Para determinar la altura de un árbol redwood de California, se hacen dos visualizaciones desde el suelo, separadas por 200 pies. Si los ángulos de visualización son de 45º y 30º respectivamente, ¿Qué tan alto es el árbol respecto a la vista más cercana?

4. ¿Cuál debe ser la altura de una escalera para alcanzar un balcón que está a 50 metros por encima del suelo si la escalera reposa sobre la construcción a un ángulo de 75º respecto al suelo?

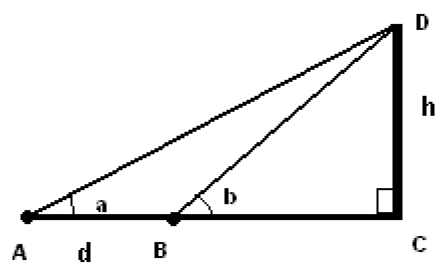
5. Obtener el valor de x para los siguientes triángulos a) y b).

6. ¡Un extraterrestre 👾 diminuto pero horrible está parado en lo alto del *Empire State Building* (que tiene 443 metros de altura) y amenaza con destruir la ciudad de Nueva York 🌇! Un agente de *Men In Black* 😎 está parado a nivel del suelo, 18 metros al otro lado de la calle, apuntando con su pistola láser al extraterrestre. ¿A qué ángulo debería disparar el agente su pistola láser? ¿Cuál es la distancia entre el extraterrestre y el agente?





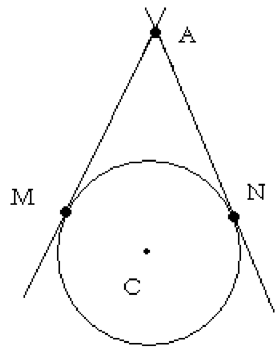
7. Desde el punto A, un observador nota que el ángulo de elevación de la parte superior de una torre (C, D) es a y desde el punto B el ángulo de elevación es b. Los puntos A, B y C (la parte inferior de la torre) son colineales. La distancia entre A y B es d. Encuentre la altura h de la torre en términos de d y los ángulos a y b, véase Figura inferior.



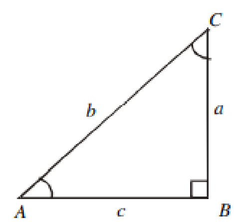
8. En un punto a 200 metros de la base de un edificio, el ángulo de elevación de la parte más baja de una chimenea es de 35°, mientras que el ángulo de elevación en la parte más alta de 53°. Encuentre la distancia entre la parte más baja y alta de la chimenea.

9. Demuestre el teorema de Pitágoras partiendo el hecho de que en un trapecio se puede formar 2 triángulos rectángulos congruentes y un triangulo rectángulo isósceles.

10. Dos rectas tangentes a un círculo en los puntos M y N tienen un punto de intersección A (ver Figura inferior). El tamaño del ángulo MAN es igual a x grados y la longitud del radio del círculo es igual a r. Calcula la distancia desde el punto A hasta el centro del círculo en términos de x y r.



11. Calcula el valor de los ángulos agudos si b = 3ª. Apóyate en la siguiente figura.

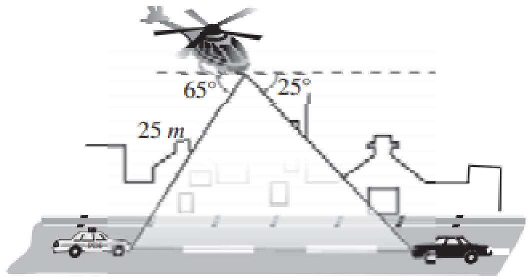


12. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65°, y su distancia a éste es de 25 metros, calcula:

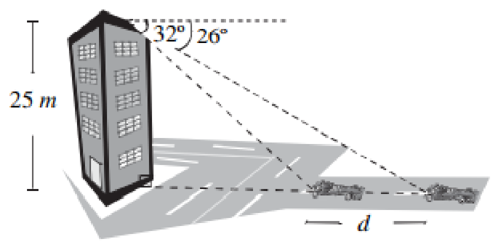
La distancia entre el helicóptero y el delincuente.

La distancia entre el patrullero y el delincuente.

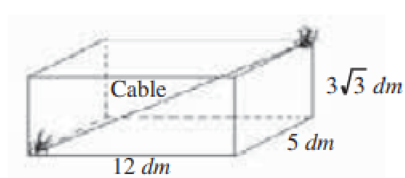
La altura del helicóptero.



13. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 m, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32°; si un instante después el ángulo es de 26°, ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



14. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.



15. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.

4. Ángulos notables.

1. Graficar cada uno de los siguientes ángulos orientados y clasificarlos de acuerdo al lugar donde finaliza su gráfica. Encuentra tres ángulos coterminales, de los cuales, al menos, uno sea negativo y uno sea positivo.

a) $\alpha = \pi/3$

b) $\beta = -5\pi/4$

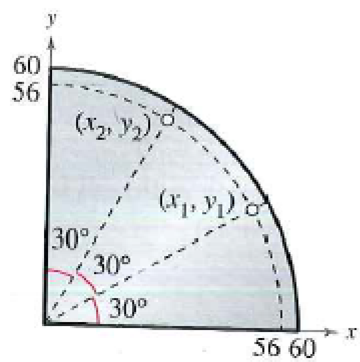
c) $\gamma = 3\pi$

d) $\phi = 17\pi/4$

2. A partir de un triangulo isósceles (cuyos 2 lados iguales miden una unidad cada uno), encuentre los valores de sen(45°), cos(45°), tan(45°).

3. Use un triangulo equilátero (de 2 unidades de lado) para hallar los valores de sen(60°), cos(60°), sen(30°) y cos(30°).

4. Una placa de acero tiene la forma de un cuarto de círculo con un radio de 60 cm. Se deben perforar dos orificios de dos centímetros de radio en la placa, colocados como se muestra en la figura. Encuentra las coordenadas del centro de cada hoyo.



5. Un avión ✈️ que vuela a una altitud de 6 millas, esta en una trayectoria de vuelo que pasa directamente sobre un observador. Si θ es el ángulo de elevación desde el observador al avión, encuentre la distancia d del observador al avión cuando $\theta = 30^o, \theta = 90^o, \theta = 120^o$. ¿Para qué ángulo la distancia se minimiza?

6. Un faro histórico esta a 200 metros de una pista de bicicleta 🚲 a lo largo de la orilla de un lago. Un pasillo al faro es de 400 m de largo. Encuentre el ángulo agudo θ entre la pista para bicicletas y el pasillo.

7. Un viajero empedernido recorre $2\pi/3$ *rad* al sur del globo, $\pi/3$ *rad* al este y $2\pi/3$ *rad* al norte, llegando al mismo lugar donde comenzó a caminar.

   a) ¿En qué lugar del planeta se encuentra?

   b) ¿De qué color son los osos en donde está?

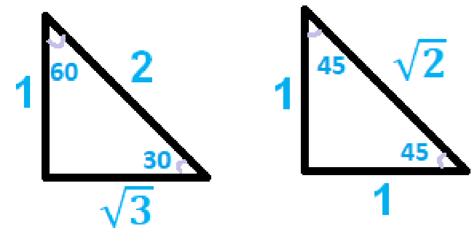
8. Mediante ángulos notables demuestra la siguiente igualdad:

$$\sqrt{sen^2\frac{3}{2}\pi + 3sec^2\pi} = csc\frac{\pi}{6}$$

9. Demuestra la siguiente igualdad, mediante el valor de los ángulos notables

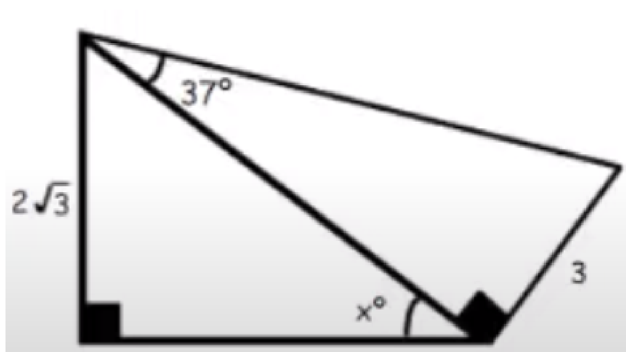
$$sen30^o\text{-}(cos30^o \cdot ctg60^o)^2 = cos^2 60$$

10. En base a los siguientes triángulos, escribe tres expresiones diferentes y encuentra su valor numérico.



11. Encuentra el valor de $sen135^o$, utilizando sólo ángulos notables.

12. De acuerdo a a figura encuentra el valor de x.



13. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

   a) $tan\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{3}$
   b) $2sen30^o \cdot cos30^o(1 - 2sen^2 30^o)$
   c) $(\frac{(sen120^o)(tan240^o)}{tan315^o - cos300^o})^3$

5. Todos los triángulos: Leyes de Senos y de Cosenos y Resolución de triángulos.

1. Dado un triángulo con medida de hipotenusa igual a 7 unidades y un cateto de 4 unidades, encuentra la longitud del lado restante y las medidas de sus ángulos.

2. Un jugador de billar quiere hacer una jugada en la cual deba alcanzar la última bola, pero tendría que triangular su tiro y saber las medidas, así como los ángulos del triángulo tentativo. Sabe que un ángulo es $\alpha = 120$, un lado es $a = 7$ unidades y $\beta = 45$. Obtener los dos lados y el ángulo restante y hacer un bosquejo del triángulo.

3. El mismísimo jugador de billar no encestó su bola y ahora tiene que hacer otro tiro, otra triangulación, pero ahora sabe que un ángulo es de $\alpha = 30$, un lado de $a = 1$ unidad y otro lado de $c = 4$ unidades. Obtener las medidas de los dos ángulos restantes y del lado faltante, y bosquejar el triángulo.

4. Supongamos que dos estaciones de radar colocadas a 20 millas de distancia detectan un avión entre ellas. El ángulo de elevación medido por la primera estación fue de 15º, mientras que el ángulo medido por la segunda estación fue de 35º. Hallar la altitud a la que se encuentra el avión.

5. La isla Sasquatch se encuentra fuera de la costa del Lago Ippizuti. Se hacen dos observamientos de la isla. El ángulo entre la costa y la isla, en el primer punto de observación, es de 30º y en el segundo es de 45º. Asumiendo, como buenos físicos, que la costa es plana (vista desde el satélite),

   a) Encontrar la distancia desde el segundo punto de observación a la isla.

   b) ¿Cuál punto en la costa es el más cercano a la isla?

   c) ¿Qué tan lejos está la isla de tal punto?

6. Resolver el triángulo con lados $a = 7$ unidades y $c = 2$ unidades, y un ángulo $\beta = 50$.

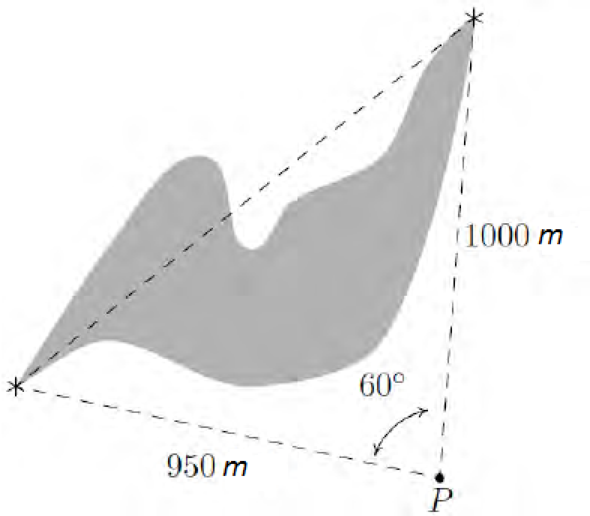
7. Un doctor en óptica quiere hacer un arreglo triangular de lentes, en el cual debe determinar las medidas de tal triángulo, pero cuando fue a casa, sólo recordó que un lado medía 4 metros, otro 7 metros y el último medía 5 metros, ¡Pero no recuerda los ángulos! Determinar las medidas de tales ángulos.

8. Hallar el área del triángulo del inciso anterior.

9. Una investigadora desea determinar el ancho de un estanque vernal (de acuerdo a la imagen). Desde un punto P, halla que la mayor distancia al oeste es de 950 metros, mientras que la mayor distancia al norte es de un kilómetro. Si el ángulo entre las dos líneas de avistamiento es de 60º, hallar la extensión del estanque.

10. Herón de Alejandría vivió en el siglo III a. de C. Él dedujo una fórmula que permite calcular el área de un triángulo cualquiera, conocidos los tres lados (digamos a, b, c), y el semiperímetro $s = (a + b + c)/2$. Demuestra que la fórmula de Herón es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$



11. Demostrar que no se puede formar ningún triangulo que contenga dos lados $a = 15$ y $b = 25$ y un ángulo de 85° (este ángulo no lo forma con el lado a y b).

12. Un poste se inclina hacia el sol a un ángulo de 8° a partir de la vertical, proyectando una sobra de 22 metros. El ángulo de elevación desde la pinta de la sombra a lo alto del poste es de 43°. ¿Cual es la altura del poste?

13. Encontrar los tres ángulos de un triangulo cuyos lados son $a = 8$, $b = 19$ y $c = 14$.

14. Sea una triangulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c. Use la formula de la distancia para calcular la distancia c entre los puntos A y B, cuyos vértices tienen coordenadas A=$(bcos(\gamma), bsen(\gamma))$, B= (a,0) y C=(0,0), donde γ es el ángulo entre el lado a y b. Después de simplificar, ¿Qué fórmula obtiene?

15. Para calcular la distancia entre 2 puntos a las orillas de un lago, se establece un punto P a 100 metros del punto M; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110^O$ y $\angle P = 40^O$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q?

6. Sistema de Coordenadas Polares.

1. Determine las coordenadas cartesianas (x, y) punto cuyas coordenadas polares (r, θ) son:

   a) (3,120°)
   b) (2, π)
   c) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$
   d) $(1, -\frac{\pi}{3})$

e) $(2, \dfrac{3\pi}{4})$

f) $(4, 5\pi/6)$

g) $(-3{,}5, \pi/4)$

h) $(3{,}5, -3\pi/4)$

i) $(2, 240)$

j) $(2, 120)$

k) $(-2, 60)$

l) $(-4, 7\pi/6)$

m) $(4, \pi/6)$

n) $(-4, 7\pi/6)$

ñ) $(4, -5\pi/6)$

o) $(-\pi, -\pi)$

2. Convierta cada punto a coordenadas polares (r, θ), considerando que $0 \leq \theta < 2\pi$:

a) $(-1, 1)$

b) $(0, 2)$

c) $(1, -2)$

d) Para $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, obtenga un par de coordenadas con $r > 0$ y otro par con $r < 0$.

e) $(2, -2\sqrt{3})$

f) $(-3, -3)$

g) $(0, 3)$

h) $(3, -4)$

i) $(-4, -4\sqrt{3})$

j) $(\sqrt{3}/4, -1/4)$

k) $(-3/10, -3\sqrt{3}/10)$

l) $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

m) $(-8, 1)$

n) $(-2\sqrt{10}, 6\sqrt{10})$

ñ) $(-\sqrt{5}/15, -2\sqrt{5}/15)$

o) $(-\sqrt{65}/5, 2\sqrt{65}/5)$

3. Demuestre que la distancia d que separa a los puntos en coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) está dada por:

$$d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - r_1 r_2 cos(\theta_2 - \theta_1)} \tag{3}$$

Hint 😉: Emplee el hecho de que $\forall\ \theta_1, \theta_2$ se tiene que: $cos\theta_2 cos\theta_1 + sen\theta_2 sen\theta_1 = cos(\theta_2 - \theta_1)$.

4. A partir de un punto en el plano polar (r, θ), deduce la identidad trigonométrica $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$.

5. Muestre que si un punto $\mathrm{S}(x_1, y_1)$ tiene coordenadas polares (r, θ), y un punto $\mathrm{T}(x_2, y_2)$ tiene coordenadas polares $(-r, \theta)$, entonces $x_1 = -x_2$ y $y_1 = -y_2$.

6. Si una partícula tiene una trayectoria lineal como $y = x+3$, ¿Cual sería la ecuación polar $r = f(\theta)$ que modela su trayectoria en coordenadas polares? ¿Cual sería su dominio de los valores de θ?

7. Convertir las siguientes ecuaciones rectangulares a polares, hacer un bosquejo de ellas (en el plano polar) y mencionar qué representa.

   a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

   b) $y = -x$

   c) $y = x^2$

   d) $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

8. Hacer la conversión de ecuación polar a ecuación rectangular, con un bosquejo de ellas y escribiendo a qué corresponden.

   a) $r = -3$

   b) $\theta = \frac{4\pi}{3}$

   c) $r = 1 - cos(\theta)$

   d) $r = 2 + 4cos(\theta)$

   e) $r = 5sen(2\theta)$

9. ¿El argumento de un punto cuyas coordenadas son polares, se considera positivo cuando?

10. Dada su forma rectangular, transforma la ecuación en su forma polar $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11. Dada su forma polar, transforma la caución a su forma rectangular. $B = \left(8, \frac{\pi}{6}\right)$.

12. Demuestra que el punto (r,θ) está en la curva $\frac{5}{sen\theta + cos\theta}$

13. Encontrar el área de un cultivo de bacterias, su forma esta dada por $R = 3COS3\theta$

14. Obtén la distancia entre los puntos A(3, 90^o) y B(– 2, 30^o).

15. En un balcón se encuentra una persona que necesita ser rescatada, debajo de ella se encuentra un camión de bomberos, cuya escalera debe ser elevada y estirada a partir de un eje polar. Tomaremos al eje polar paralelo al eje de descanso de la escalera y el polo será la posición inicial de la escalera. Si la escalera se ha tenido que estirar 10 metros y elevar 40 grados. Escribe su representación en coordenadas polares y posteriormente debes de transformarlo a coordenadas cartesianas.

7. Graficar funciones en el plano polar.

1. Utilizando un dominio $0 \leq \theta < 2\pi$, realiza el bosquejo de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) $f(\theta) = 3$
   b) $\theta = \pi/4$
   c) $f(\theta) = 3cos\theta$
   d) $f(\theta) = cos(2\theta)$
   e) $f(\theta) = \theta$
   f) $f(\theta) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\theta}$
   g) $f(\theta) = e^{\theta}$
   h) $f(\theta) = e^{-\theta^2}$
   i) $f(\theta) = \frac{1}{10^{\theta^2}}$
   j) $f(\theta) = \frac{1}{\theta}$

2. ¿Cuántos pétalos tienen las curvas de roseta dadas por $f(\theta) = 2cos(4\theta)$ y $f(\theta) = 2cos(3\theta)$?
   Determine el número de pétalos para las curvas dadas por $f(\theta) = 2cos(n\theta)$ y $f(\theta) = 2sen(n\theta)$.

3. Dibuje y encuentre los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas (utilice un dominio $0 \leq \theta < 2\pi$):

   a) $f(\theta) = 3 + 6cos\theta,\ f(\theta) = 3$
   b) $f(\theta) = 2cos\theta - 1,\ \theta = \pi/6$
   c) $f(\theta) = sin(2\theta),\ f(\theta) = cos\theta$
   d) $f(\theta) = 1 - cos(\theta), f(\theta) = 3$
   e) $f(\theta) = 2 + 4cos(\theta), f(\theta) = cos(2\theta)$

f) $f(\theta) = 5sen(2\theta), f(\theta) = 1 - sen(3\theta)$

4. Usar la ley de cosenos para desarrollar una fórmula para la distancia entre dos puntos en coordenadas polares.

5. La expresión $f(\theta) = a \pm bcos\theta$ generá una gráfica llamada Limaçon. Utilice la siguiente liga (https://www.desmos.com/calculator/folzq5nphc?lang=es) y utilice un dominio $0 \leq \theta < 2\pi$:

   a) Dejando los parámetros a, b fijos. Si cambia el $cos\theta$ por $sen\theta$ ¿Cómo cambia la simetría respecto a la expresión inicial? Explique.

   b) Suponga que usted se tatuará una ecuación polar representando lo más aproximado a un corazón ❤️ (cardioide). ¿Qué deben cumplir el cociente de los parámetros a, b para generar dicha forma?

   c) ¿Qué forma se genera si $a/b < 1$?

   d) ¿Qué condición debe cumplir b para que generé una circunferencia $\forall$ a real?

6. La fórmula que genera la gráfica de la espiral 🌀 de Arquímedes viene dada por $f(\theta) = a + b\theta$. Explique que sucede cuando aumenta el dominio en pasos de 2π.

7. ¿Cuántos pétalos tiene la rosa polar $r = sen(2\theta)$? Algunos tréboles crecen de esta forma, otros de acuerdo a $r = sen(3\theta)$, otros más como $r = sen(4\theta)$ y hay un sinfín de subespecies que tienen más pétalos. Conjeturar cuántos pétalos tiene la rosa polar $r = sen(n\theta)$ para cualquier número natural n.

8. En la ecuación $r = sen(n\theta)$, reemplazar el seno por coseno y realizar la misma conjetura.

9. La ecuación de la recta en su forma polar esta dada por $rsen\theta = 6$, determina si es paralela al eje polar.

10. Los caracoles tienen, como su nombre lo indica, la forma de este gasterópodo de concha helicoidal. Su ecuación tiene alguna de las formas:

$$r = a + bsen\theta \tag{4}$$
$$r = a - bsen\theta \tag{5}$$
$$r = a + bcos\theta \tag{6}$$
$$r = a - bcos\theta \tag{7}$$

    Explica que sucede con $a < b$ y con $a > b$?

11. Identifica si la siguiente curva es simétrica con respecto al eje Y, y gráficala.

$$r = 2 + 6sen\theta$$

12. Las espirales son curvas que se enrollan alrededor del origen un número infinito de veces, de tal manera que r aumenta o disminuye a medida que θ crece. La espiral de Arquímedes es la más conocida. Grafica la espiral

$$r = \frac{1}{2}\theta$$

Considera que $0 \leq \theta \leq 4$

13. Las cónicas concoides de Nicómedes son curvas que, en su prolongación, se aproximan a una recta y tienen por ecuación

$$r = a + bsec\theta, \text{ donde a} \succ 0 \text{ y b} \succ 0$$

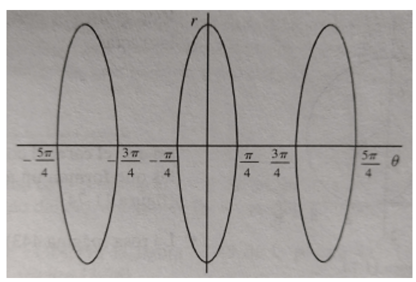
Investiga lo siguiente:

a) Qué pasa si a = b

b) Qué pasa si a $\succ$b

c) Qué pasa si a $\prec$b

14. Observa con mucha atención la siguiente gráfica de Lemniscata y explica lo que sucede.



15. Gira el caracol cuya ecuación es $r = 2+6sen\theta$ en un ángulo $\frac{\pi}{3}$, en sentido positivo.

8. Sistemas de Coordenadas en el espacio.

1. Resuelva los siguientes incisos y dibuje los puntos en el sistema de coordenadas que se le pide 📝:

   a) Calcule las coordenadas esféricas del punto (1,-1,1).

   b) Calcule las coordenadas cartesianas del punto $(3,\ \pi/6, \pi/4)$.

   c) Considere el punto (2,-3,6) en coordenadas cartesianas. Calcule sus coordenadas esféricas.

d) Del punto $(1,-\pi/2,\pi/4)$ en coordenadas esféricas, calcule sus coordenadas cartesianas.

e) Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto (6,6,8).

f) A partir del punto de coordenadas cilíndricas $(8, 2\pi/3$,-3) encuentre sus coordenadas en cartesianas.

g) De los siguientes puntos en coordenadas cilíndricas, exprese cada uno en coordenadas esféricas: (1, 45°, 1), (3, $\pi/6$, 4) y (2, $3\pi/4$, -2).

2. Un físico modela superficie en la cuales puede encontrarse una partícula. Su modelo esta dado en coordenadas cartesianas como:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(x^2 + y^2) = 4xyz \tag{8}$$

   Simplifique la expresión en coordenadas esféricas.

3. Dibuje las superficies generadas en:

   a) Coordenadas cilíndricas cuando: $r = cte$, $\theta = cte$ y $z = cte$.

   b) Coordenadas esféricas cuando: $\rho = cte$, $\theta = cte$ y $\phi = cte$.

4. Ingenieros aeronáuticos trabajan localizando objetos aéreos dando una latitud y una longitud. Asumiendo que la Tierra tiene forma esférica y que el radio terrestre es de 6500 km, contesta lo siguiente.

   a) ¿Cuáles son los ejes coordenados con los que trabajan y dónde se encuentran?

   b) Washington, D.C., está localizado a 39º N y 77º W. Expresar la localización de Washington en coordenadas esféricas.

   c) San Francisco se localiza a 37.78ºN y 122.42ºW. Expresar esta locación en coordenadas esféricas.

   d) Encuentra la latitud y la longitud de Rio de Janeiro si sus coordenadas son (4000, -43.17º, 102.91º).

   e) Encuentra la latitud y la longitud de Berlín, con sus coordenadas esféricas siendo (4000, 13.38º, 37.48º).

5. Físicos nucleares del CERN ubican una partícula en un espacio confinado por la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$ (con $0 < r \leq R$).

   a) Usa GeoGebra para graficar esta ecuación y di cómo se llama esta figura.

   b) Determina la ecuación de este espacio en coordenadas esféricas.

   c) Si $r = R$, la ecuación corresponde a un "toro de cuerno". Muestra que la ecuación de un toro de cuerno, en coordenadas esféricas, es $\rho = 2Rsen(\varphi)$

6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a los puntos $A = (0, -3)$ y $B = (0, 3)$ sea 9.

7. A través del origen O traza la cuerda OQ del círculo con centro en $(a, 0)$ y radio a. Llama A al punto donde OQ corta a la recta $x = 2a$. ¿Cuál es el lugar geométrico al mover Q, del punto P en la cuerda OQ tal que $OP = QA$?

8. Demuestra que las curvas $r = -\frac{5}{cos\theta}$ y $r = 10sen\theta$ se cortan en un sólo punto. Escribe las coordenadas polares del punto de intersección y dibuja la gráfica de las curvas.

9. Encuentra los puntos de intersección de las curvas $r = 3 + 3cos\theta$ y $r = 3 - 3cos\theta$. Dibuja la gráfica.

10. Dibuja la región que se encuentra

    a) Dentro de $r = 3sen\theta$

    b) Fuera de $r = \frac{2}{3}cos\theta$

    c) Arriba de $r = \frac{4}{2sen\theta + cos\theta}$

11. Un segmento de longitud 2a tiene sus extremos sobre dos rectas fijas perpendiculares. Hallar el lugar geométrico del pie de la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las rectas del segmento.

12. Grafica la curva, cuya ecuación es $xy - 2x - 2y + 2 = 0$

13. Pasa por el punto (10, 30°) y forma un ángulo de 150° con el eje polar.

14. Resuelve el sistema de ecuaciones y traza la gráfica

$$\begin{cases} r = 4\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

15. Se tiene a los puntos A(r_1, 30^o) y B(-1, 120^o)

    Encuentra el valor de r_1 si la distancia entre los puntos es $\sqrt{5}$