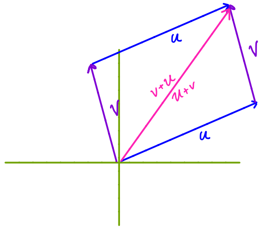
# Espacios vectoriales

Definición

Ejemplos




Arilin's Math World

# Definición

**Definición.** Un conjunto $V$, cuyos elementos llamaremos *vectores*, constituye un *espacio vectorial real* si se tienen definidas dos reglas de composición,

i) *suma*, denotada por $+$, que asigna a cualquier par de vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, un nuevo vector denotado por $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$;

ii) *producto por un escalar*, sin símbolo, que asigna a un número real (en lo sucesivo llamado *escalar*) $\lambda$ y un vector $\bar{v}$, un nuevo vector denotado por $\lambda\bar{v}$.

Las reglas de composición deben obedecer las condiciones siguientes, mismas que daremos primero coloquialmente y después simbólicamente:

1) *V es cerrado bajo la suma*, es decir, la suma de dos vectores es un vector; en símbolos escribimos

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V \quad \text{para cualesquiera} \quad \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

2) *la suma es asociativa*, es decir, dados tres vectores pueden sumarse los dos primeros y después añadir el tercero, o bien sumarse los dos últimos y añadir el resultado al primer vector; en símbolos escribimos (note que el orden de los sumandos no cambia)

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) \quad \text{para cualesquiera} \quad \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V;$$

3) *existe un elemento neutro para la suma*, es decir, un vector que sumado a cualquier otro no lo afecta; el elemento neutro suele denotarse con $\bar{0}$ porque juega, respecto a la suma de vectores, el mismo papel que el número real 0 respecto a la suma de números reales. En símbolos escribimos

$$\text{existe} \quad \bar{0} \in V \quad \text{tal que} \quad \bar{0} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{0} = \bar{v} \quad \text{para cualquier} \quad \bar{v} \in V;$$

4) *cada elemento tiene inverso*, es decir, para cada vector existe otro tal que al sumarlo con el original da como resultado el elemento neutro; en símbolos expresamos

$$\text{para cada} \quad \bar{v} \in V \quad \text{existe} \quad -\bar{v} \in V \quad \text{tal que} \quad -\bar{v} + \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0};$$

5) *la suma es conmutativa*, es decir, dos vectores pueden sumarse en cualquier orden sin alterar el resultado; en símbolos,

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \quad \text{para cualesquiera} \quad \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

6) *el producto (de un vector) por un escalar produce un vector*, es decir, cuando se multiplica un vector por un número real, el resultado es otro vector; en símbolos

$$\lambda\bar{v} \in V \quad \text{para cualesquiera} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \, \bar{v} \in V;$$

7) *el producto por un escalar se distribuye sobre la suma de vectores*, es decir, al multiplicar una suma de vectores por un número real, se obtiene el mismo resultado que si cada vector se multiplica separadamente por el número y después se suman los vectores así obtenidos; en símbolos,

$$\lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 \quad \text{para cualesquiera} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

8) *el producto por un escalar distribuye la suma de escalares*, es decir, al multiplicar un vector por el resultado de la suma de dos números reales, se obtiene el mismo vector que cuando primero se multiplica el vector original por cada uno de los escalares y después se suma el resultado de esas dos multiplicaciones; en símbolos escribimos

$$(\lambda + \mu)\bar{v} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{v} \quad \text{para cualesquiera} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \, \bar{v} \in V;$$

9) *el producto por escalares puede asociarse en cualquier forma*, es decir, si se multiplica un vector por el resultado de la multiplicación de dos números reales, se obtiene el mismo resultado que si primero se multiplica el vector por uno de los números y después al nuevo vector se le multiplica por el otro; en símbolos

$$(\lambda\mu)\bar{v} = \lambda(\mu\bar{v}) \quad \text{para cualesquiera} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \, \bar{v} \in V;$$

10) *el número real 1 funciona como neutro para el producto por escalares*, es decir, si multiplicamos cualquier vector por el número real 1, el vector no se altera; en símbolos

$$1\bar{v} = \bar{v} \quad \text{para cualquier} \quad \bar{v} \in V.$$

# Ejemplo 1.

Consideremos 

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ con las siguientes operaciones

Suma:

Sean $\bar{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\bar{v}_2 = (x_2, y_2)$ elementos de $V$.

Definimos su soma vectorial como la suma "coordenada a coordenada", es decir:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Producto escalar:

Sean $\bar{v} = (x, y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos el prodcto escalar multiplicando "el escalar" en cada coordenada, es decir:

$$\lambda \bar{v} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Sí, chicos. Tal como lo están pensando, para verificar que un conjunto es espacio vectorial hay que verificar que su suma y producto escalar cumplan las 10 condiciones.


① Cerradura de la suma.

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$ entonces $v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Como $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ entonces $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ y $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, por lo tanto $(x_1, x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$, lo que implica $v_1 + v_2 \in V$

② Soma asociativa

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V$, entonces

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$
$$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3)$$

③ Neutro aditivo (para la suma).

Consideremos el vector $\bar{0} \in V$ como $\bar{0} = (0,0)$. Entonces

$$\bar{v} + \bar{0} = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = \bar{v}$$

④ Inverso aditivo

Para $\bar{v} = (x, y)$ consideremos $-\bar{v} = (-x, -y)$. Entonces

$$\bar{v} + -\bar{v} = (x + y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (x - x, y - y) = (0, 0) = \bar{0}$$

también

$$-\bar{v} + \bar{v} = (-x, -y) + (x, y) = (-x + x, -y + y) = (0, 0) = \bar{0}$$

⑤ Soma conmutativa

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$ entonces

$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \bar{v}_2 + \bar{v}_1$

⑥ Cerradura bajo producto escalar

Sean $\bar{v} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$\lambda \bar{v} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Dado que $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda x \in \mathbb{R}$ y $\lambda y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $(\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$, lo que implica $\lambda \bar{v} \in V$

⑦ El producto escalar se distribuye

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$. Entonces

$\lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \lambda(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ Usar regla 1

$= (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2))$ Definición de producto escalar

$= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2)$ Distribución en los reales

$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2)$ Definicion de soma

$= \lambda \bar{v}_1 + \lambda \bar{v}_2$ Definición de producto escalar

⑧ Se distribuye la suma de escalares

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$. Entonces

$(\lambda + \mu)\bar{v} = (\lambda + \mu)(x, y) = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y)$

$= (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y)$

$= (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y)$

$= \lambda \bar{v} + \mu \bar{v}$

⑨ El producto escalar se asocia

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$. Entonces

$(\lambda\mu)\bar{v} = (\lambda\mu)(x, y) = (\lambda\mu x, \lambda\mu y)$

$= (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y))$

$= \lambda(\mu x, \mu y)$

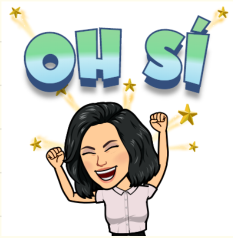
$= \lambda(\mu \bar{v})$

⑩ Neutro escalar (1)

Sea $\bar{v} \in V$ entonces

$1\bar{v} = 1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y) = \bar{v}$.

Como ya verificamos las 10 reglas ya podemos decir que $V$ es un espacio vectorial.



# Ejemplo 2

Demostración:

Ejercicio

Consideremos

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ con las siguientes operaciones

Suma:

Sean $\bar{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\bar{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ elementos de $V$.

Definimos su soma vectorial como la suma "coordenada a coordenada", es decir:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Producto escalar:

Sean $v = (x, y, z)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos el prodcto escalar multiplicando "el escalar" en cada coordenada, es decir:

$$\lambda \bar{v} = \lambda (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

# Ejemplo 2

Consideremos

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$ con las siguientes operaciones

**Suma:**

Sean $\bar{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$ $\bar{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ elementos de $V$.

Definimos su soma vectorial como la suma "coordenada a coordenada", es decir:

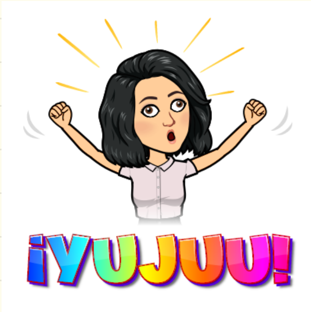
$$\bar{v}_1+\bar{v}_2=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

**Producto escalar:**

Sean $v=(x,y,z)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Definimos el prodcto escalar multiplicando "el escalar" en cada coordenada, es decir:

$$\lambda\bar{v}=\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$

Demostración: Les voy a decir como empezar.




Sí, chicos. Tal como lo están pensando. Igual que en el ejercicio anterior para verificar que un conjunto es espacio vectorial hay que verificar que su suma y producto escalar cumplan las 10 condiciones.

# Ejemplo 3.

Consideremos

$V=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ funciones que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

**Suma:**

Sean $f,g$ elementos de $V$. Definimos la suma de las funciones $f$ y $g$ con la regla de correspondencia $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

**Producto escalar:**

Sea $f\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ definimos el producto escalar $\lambda f$ con la regla de correspondencia

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Sí, chicos. Tal como lo están pensando, para verificar que un conjunto es espacio vectorial hay que verificar que su suma y producto escalar cumplan las 10 condiciones.


1. Cerradura de la suma.

Sean $f,g\in V$. Tenemos que ver que $(f+g)$ es una función que va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Como $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones, la regla $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ le asigna a cada número real $x$ una única imagen $f(x)+g(x)\in\mathbb{R}$. Por lo tanto $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sí es una función y existe en $V$.

2. Suma asociativa

Sean $f,g,h\in V$. Entonces

$$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)$$
$$=f(x)+(g(x)+h(x))=f(x)+(g+h)(x)$$
$$=(f+(g+h))(x).$$

Por lo tanto $(f+g)+h=f+(g+h)$.

3. Neutro aditivo (para la suma).

Consideremos la función $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\theta(x)=0$ $\forall x$.

Entonces para toda $f\in V$ se tiene

$(f+\theta)(x)=f(x)+\theta(x)=f(x)+0=f(x)$. Así $f+\theta=f$

4. Inverso aditivo

Sea $f\in V$ y consideremos $-f$ dada por la regla $(-f)(x)=-f(x)$.

Entonces $(f+(-f))(x)=f(x)+(-f(x))=f(x)-f(x)=0$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

por lo tanto $f+(-f)=\theta$

⑤ Soma conmutativa

Sean $f, g \in V$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$.

Lo que implica $f+g = g+f$.

⑥ Cerradura bajo producto escalar

Sean $f \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces

$\lambda f(x) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto la regla

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ define una función $\lambda f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lo que implica que $\lambda f \in V$.

⑦ El producto escalar se distribuye

Sean $f, g \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}$

$(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$.

Por lo tanto $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

⑧ Se distribuye la suma de escalares

Sean $f \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple

$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$.

Por lo tanto $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$.

⑨ El producto escalar se asocia

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $f \in V$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$

$((\lambda\mu) f)(x) = (\lambda\mu) f(x) = \lambda\mu f(x) = \lambda(\mu f(x))$

Lo que implica $(\lambda\mu) f = \lambda(\mu f)$.

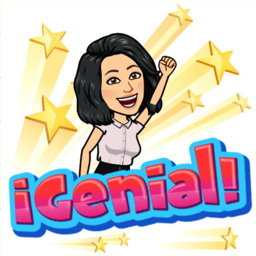
⑩ Neutro escalar (1)

Sea $f \in V$ entonces para cada $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f)$

$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

Por lo tanto $1f = f$.

Como ya verificamos las 10 reglas ya podemos decir que $V$ es un espacio vectorial.



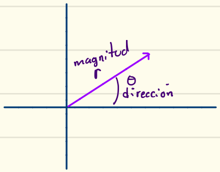
# Ejemplos 4 y 5.

## * Fuerzas en el plano
## * Fuerzas en el espacio

Para esto lo que hacemos es ver la "fuerza" como vector.

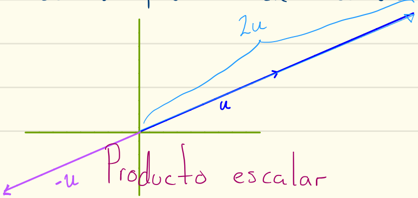
Me refiero a que veamos la fuerza como algo que tiene

magnitud y dirección.



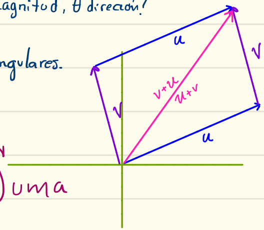

Suena como coordenadas polares, ¿Verdad? ¿r magnitud, θ dirección?

Pero también se puede ver en coordenadas rectangulares.




Producto escalar

Suma




Chequen los videos para que puedan ver que las fuerzas también son un espacio vectorial.
¿A qué espacio vectorial se parecen?

**Vean los siguientes videos para que vean la aplicación de fuerza como un vector, y entiendan como se suman, como se multiplica por escalar.**

**-Suma de vectores (magnitud dirección)**
**https://www.youtube.com/watch?v=TWdLKBC_AgA**
**-Suma de vectores coordenadas rectangulares**
**https://www.youtube.com/watch?v=40-FPrE4v_0**
**-Multiplicación de vector por escalar**
**https://www.youtube.com/watch?v=fjizt35knGs**
**https://www.youtube.com/watch?v=WM_HOi0XYDo**

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World