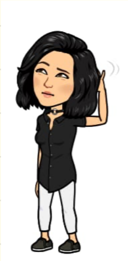
Subespacios vectoriales

* Definición
* Ejemplos

Subespacios vectoriales

Sea V un espacio vectorial. Decimos que W es subespacio vectorial de V si:

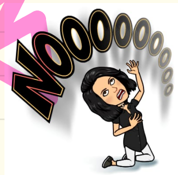
* W es subconjunto de V
* W es un espacio vectorial con las mismas operaciones de V.



O sea, un espacio vectorial metido en otro espacio vectorial.

Supongamos que ya sabemos que V es un espacio vectorial. Si quisiéramos ver que un subconjunto W de V es un espacio vectorial ¿qué tendríamos que hacer?

Verificar las 10 condiciones de espacio vectorial .



Pero notemos que las propiedades 2, 5, 7, 8, 9 y 10.

Son "heredadas" de V. Pues si todos los elementos de V las cumplen en particular los W las cumplen.

Entonces las propiedades que sí tendríamos que verificar son: 1, 3, 4 y 6.

Es decir lo que tenemos que verificar es:

* Cerradura de W bajo suma

  Si u y $v \in W \Rightarrow u+v \in W$

* Neutro aditivo

  $0 \in W$

* Inverso aditivo

  Si $u \in W \Rightarrow -u \in W$

* Cerradura bajo producto

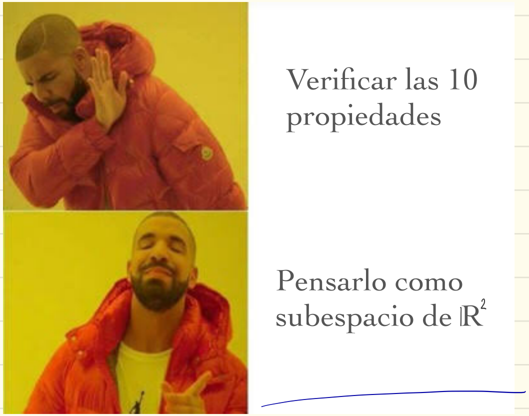
  Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in W$
  $\Rightarrow \lambda u \in W$

Ejemplo 1

Demostrar que el conjunto $W = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$ es un espacio vectorial.

$= \{(x,0)\in\mathbb{R}^2\}$

$=$ eje x



Lo que tenemos que verificar es:

* Cerradura de W bajo suma

Sean $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$ en W entonces

$(x_1,0)+(x_2,0) = (\underbrace{x_1+x_2}_{\mathbb{R}},0)\in W$. ✓

* Neutro aditivo

$\bar{0} \in W$ ¿$(0,0)\in W$? Si como $0\in\mathbb{R}$

$(0,0)\in W$

* Inverso aditivo

Sea $(x,0)\in W$ entonces $-x\in\mathbb{R}$ por lo tanto

$(-x,0)\in W$ además $(x,0)+(-x,0)=(0,0)$ ✓

* Cerradura bajo producto escalar

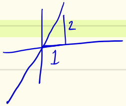
Sea $(x,0)\in W$ $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces

$\lambda(x,0) = (\lambda x, \lambda 0) = (\underbrace{\lambda x}_{\mathbb{R}}, \underbrace{0}_{y=0}) \in W$.

¡Si! ■

Ejemplo 2

Demostrar que el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ es un espacio vectorial.
$= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$



$W \subseteq \mathbb{R}^2$ Sabemos que $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial

Lo que tenemos que verificar es:

* Cerradura de W bajo suma

Sean $(x_1, 2x_1), (x_2, 2x_2) \in W$ entonces

$$(x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\mathbb{R}}, 2(\underbrace{x_1 + x_2}_{\mathbb{R}})) \in W.$$

* Neutro aditivo

¿$(0, 0) \in W$? Sí

$$(0, 0) = (0, 2(0)) \in W$$

* Inverso aditivo

Sea $(x, 2x) \in W$ consideremos $(-x, -2x) = (-x, 2(-x)) \in W$

$$(x, 2x) + (-x, -2x) = (0, 0)$$

* Cerradura bajo producto

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x, 2x)$ entonces $\lambda(x, 2x) = (\lambda x, \lambda 2x) = (\lambda x, 2(\lambda x)) \in W.$ ∎

Ejemplo 3

Demostrar que el conjunto $C = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es una función constante} \}$ es un espacio vectorial.

$V = \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ funciones que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Suma:

Sean f, g elementos de V. Definimos la suma de las funciones f y g con la regla de correspondencia $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Producto escalar:

Sea $f \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos el producto escalar λf con la regla de correspondencia

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como V es espacio vectorial y $C \subset V$. Demostraré solamente las propiedades de subespacio vectorial.

Lo que tenemos que verificar es:

* Cerradura de ~~W~~ C bajo suma

Sean f_1 y $f_2 \in W \Rightarrow f_1(x) = c_1$ y $f_2(x) = c_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1 + f_2 \quad f_1(x) + f_2(x) = c_1 + c_2 \quad \forall x \qquad f_1 + f_2 \in C$

* Neutro aditivo

$0(x) = 0 \quad \forall x \qquad 0 \in C$

* Inverso aditivo

Sea $f \in C \Rightarrow f(x) = c \quad \forall x \Rightarrow -f$ tiene regla de asignación $(-f)(x) = -c$

$f + (-f) \quad (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = c + (-c) = c - c = 0$

entonces $-f$ es el inverso aditivo de f y como también es función constante $-f \in C$

* Cerradura bajo producto

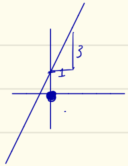
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C \Rightarrow f(x) = c \quad \forall x$.

$(\lambda f)(x) = \lambda c \qquad \lambda f \in C$

■

Ejemplo 4

Demostrar que el conjunto $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\underline{3x+1}\}$ es un espacio vectorial.
$=\{(x,3x+1) \mid x\in\mathbb{R}\}$



$W \subseteq \mathbb{R}^2$

Nota:
Para que un conjunto no sea espacio vectorial basta con que no se cumpla alguna de las condiciones.

Lo que tenemos que verificar es:

Y pues bueno, en este caso W no cumple con ninguna de las condiciones.

* Cerradura de W bajo suma

Sean $(x_1, 3x_1+1)$ y $(x_2, 3x_2+1)$ en W $\Rightarrow$

$(x_1, 3x_1+1)+(x_2, 3x_2+1)=(x_1+x_2, 3x_1+1+(3x_2+1)) = (x_1+x_2, 3(x_1+x_2)+2) \notin W$.

* Neutro aditivo

El vector $(0,0)\notin W$ pues no cumple la ecuación $y=3x+1$. ya que $\underset{y}{0} \neq 3(\underset{x}{0})+1$

W no es espacio vectorial porque no cumple con las condiciones.

* Inverso aditivo

* Cerradura bajo producto

Ejemplo 5

Demostrar que el conjunto $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\}$ es un espacio vectorial.

$= \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$=$ plano yz

Para ver que W es espacio vectorial debemos verificar que cumple las 10 propiedades...

Como $W\subseteq\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial para demostrar que W es un espacio vectorial no hace falta verificar las 10 propiedades, de hecho basta con ver que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ verificando sólo las 4 propiedades.

Lo que tenemos que verificar es:

* Cerradura de W bajo suma

Sean $(0,y_1,z_1)$ y $(0,y_2,z_2)$ elementos de W. Entonces

$(0,y_1,z_1)+(0,y_2,z_2)=(0,y_1+y_2,z_1+z_2)\in\mathbb{R}$

* Neutro aditivo

Sabemos que el vector cero en $\mathbb{R}^3$ es $(0,0,0)$ y tambien sabemos que dicho vector existe en W pues $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ y su primer coordenada es 0.

* Inverso aditivo

Sea $v=(0,y,z)\in W$ entonces $-v=(0,-y,-z)\in W$. (pues $y,z\in\mathbb{R} \Rightarrow -y,-z\in\mathbb{R}$)

además $v+(-v)=(0,y,z)+(0,-y,-z)=(0,0,0)$. Por lo tanto W si cumple con la propiedad.

* Cerradura bajo producto

Sean $\lambda\in\mathbb{R}$ y $v=(0,y,z)\in W$. Entonces

$\lambda v=\lambda(0,y,z)=(\lambda 0,\lambda y,\lambda z)=(0,\lambda y,\lambda z)\in W$ (pues tiene su coordenada $x=0$ y $\lambda y,\lambda z\in\mathbb{R}$ ya que $\lambda,y,z\in\mathbb{R}$.)

Por lo tanto hemos demostrado que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Lo que implica que W es un espacio vectorial.

- Imágenes creadas con Bitmoji
- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World