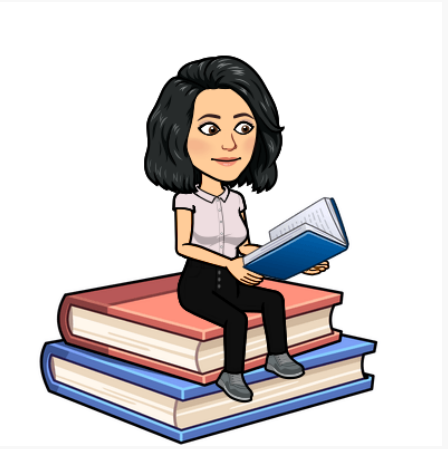
Dependencia e Independencia lineal

* Combinación lineal
* Dependencia lineal
* Independencia lineal

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Recordemos que estamos "dentro" del tema Espacios Vectoriales.



Combinación lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial y consideremos los vectores $v, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Decimos que v es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = v$.

En este caso también se dice los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generan al vector v

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$

El vector (1,1) es combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1).

v v_1 v_2

$1(1,0) + 1(0,1) = (1,1)$

El vector (-2,10) es combinación lineal del vector (1,-5)

v v_1

Consideramos $\lambda_1 = -2$ y obtenemos

$(-2,10) = (-2)(1,-5)$

Ejemplos →

Ejemplo 1

Sean v_1, v_2 y v_3 vectores tales que $v_1 + v_2 = v_3$.

¿Qué podemos decir de v_1, v_2 y v_3?

① Como $v_1 + v_2 = v_3$ es claro que v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2, con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Esto es lo mismo que decir que v_1 y v_2 generan a v_3

② ¿v_2 es combinación lineal de v_1 y v_3?

Sí, pues como estamos en un espacio vectorial v_1 tiene inverso aditivo $-v_1 = (-1)v_1$.

así $v_1 + v_2 = v_3$ implica $v_1 + v_2 + (-v_1) = v_3 + (-v_1)$ luego $v_2 = 1v_3 + (-1)v_1$

Ejemplo 2

Considera $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$. ¿Quien es el conjunto C generado por v_1 y v_2?

$$C = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v \text{ es combinación lineal de } (1,0) \text{ y } (0,1) \}$$
$$= \{ \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathbb{R}^2$$

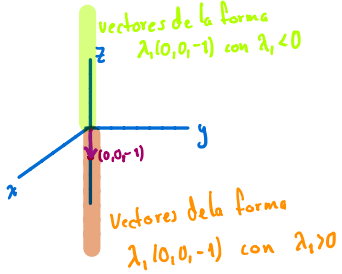
Ejemplo 3.

En $\mathbb{R}^3$ quien es el conjunto generado por:

a) $(0,0,0)$ el generado por $(0,0,0)$ está formado por todos los vectores de la forma $\lambda_1(0,0,0)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ pero $\lambda_1(0,0,0) = (0,0,0)$ para cualquier λ_1. Entonces el conjunto generado por $(0,0,0)$ es "él mismo" el vector $(0,0,0)$

b) $(0,0,-1)$

el generado por $(0,0,-1)$ está formado por todos los vectores de la forma $\lambda_1(0,0,-1)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ pero $\lambda_1(0,0,-1) = (0,0,-\lambda_1)$ para cualquier λ_1. Entonces el conjunto generado por $(0,0,-1)$ es es el eje z.



Dependencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial y consideremos los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.

Ejemplos:
En $\mathbb{R}^2$
Los vectores $(2,2)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ son linealmente dependientes.
v_1 v_2 v_3

Consideremos $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Entonces

$(-1)(2,2) + 2(1,0) + 2(0,1) = (-2,-2) + (2,0) + (0,2) = (-2+2+0, -2+0+2) = (0,0)$.

Los vectores $(0,1)$ y $(1,0)$ no son linealmente dependientes.

$(0,1)$ y $(1,0)$

$\lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,0) = (0,0)$

$(0, \lambda_1) + (\lambda_2, 0) = (0,0)$

$(\lambda_2, \lambda_1) = (0,0) \rightarrow \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = 0$

Independencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial y consideremos los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes.

Es decir que la única manera de que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ es cuando $\lambda_i = 0$ para toda i entre 1 y n.

Ejemplo:

$(0,1)$ y $(1,0)$

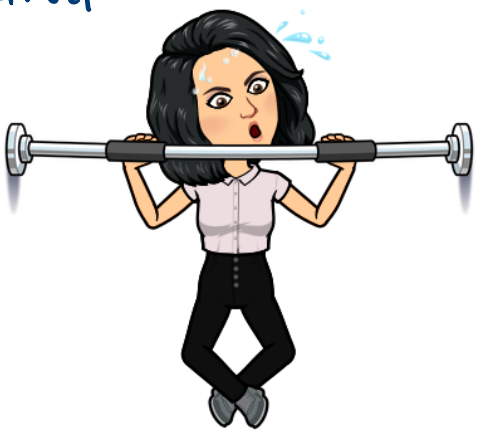
$\lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,0) = (0,0)$

$(0, \lambda_1) + (\lambda_2, 0) = (0,0)$

$(\lambda_2, \lambda_1) = (0,0) \rightarrow \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = 0$.

Ejercicio 1

Dependencia e Independencia lineal



Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^2$

$V_1=(3,4)$, $V_2=(2,1)$ y $V_3=(0,3)$

¿Son linealmente dependientes o linealmente independientes?

$$\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2+\lambda_3 V_3=0 \rightarrow$$

$$\lambda_1(3,4)+\lambda_2(2,1)+\lambda_3(0,3)=(0,0) \rightarrow$$

$$(3\lambda_1,4\lambda_1)+(2\lambda_2,\lambda_2)+(0,3\lambda_3)=(0,0) \rightarrow$$

$$(3\lambda_1+2\lambda_2,\ 4\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)=(0,0) \rightarrow$$

♥ $3\lambda_1+2\lambda_2=0$

◎ $4\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0$

de ♥ tengo $\lambda_1=-\frac{2\lambda_2}{3}$. Sustituyendo en ◎ obtengo

$$4\left(-\frac{2\lambda_2}{3}\right)+\lambda_2+3\lambda_3=0 \rightarrow -\frac{8}{3}\lambda_2+\lambda_2+3\lambda_3=0 \rightarrow$$

$$-\frac{5}{3}\lambda_2+3\lambda_3=0 \rightarrow 3\lambda_3=\frac{5}{3}\lambda_2 \rightarrow \lambda_3=\frac{\frac{5}{3}\lambda_2}{3} \rightarrow \lambda_3=\frac{5}{9}\lambda_2$$

$$\lambda_1(3,4)+\lambda_2(2,1)+\lambda_3(0,3)=(0,0) \rightarrow$$

$$\left(-\frac{2\lambda_2}{3}\right)(3,4)+\lambda_2(2,1)+\left(\frac{5}{9}\lambda_2\right)(0,3)=\left(-2\lambda_2,-\frac{8}{3}\lambda_2\right)+(2\lambda_2,\lambda_2)+\left(0,\frac{5}{3}\lambda_2\right)$$

$$=\left(-2\lambda_2+2\lambda_2+0,\ -\frac{8}{3}\lambda_2+\lambda_2+\frac{5}{3}\lambda_2\right)$$

$$=(0,0)$$

Para cualquier valor que le de a λ_2 si uso $\lambda_1=-\frac{2\lambda_2}{3}$ y $\lambda_3=\frac{5}{9}\lambda_2$ obtengo el vector $\bar{0}$ como combinación lineal.

Por lo tanto V_1, V_2 y V_3 son **linealmente dependientes**

Si queremos un ejemplo de $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0$ sólo hay que darle algún valor a λ_2

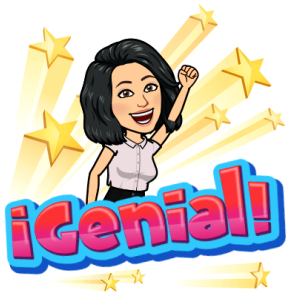
Notemos que $\lambda_2=0$ no funciona pues tendríamos $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Intentemos con $\lambda_2=9$. Entonces $\lambda_1=-\frac{2\lambda_2}{3}=-\frac{2(9)}{3}=-6$ y

$\lambda_3=\frac{5}{9}\lambda_2=\frac{5}{9}(9)=5$.

Sustituyamos "a ver si es cierto" LOL.

$-6(3,4)+9(2,1)+5(0,3)=(-18,-24)+(18,9)+(0,15)=(-18+18+0,-24+9+15)=(0,0)$



Más definiciones

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Más definiciones

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Más definiciones

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Más definiciones

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Más definiciones

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

- Imágenes creadas con Bitmoji
- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World